目　　录

第一章　半渗透介质和温度控制问题

1. 连续介质力学的回顾

我们不打算在这里叙述连续介质的完整理论，对这部分内容读者可参阅 P. Germain[1],[2], G. Mandel[1], W. Noll 和 C. Truesdell[1], Sedov[1] 等著作.

但是我们认为有必要回顾所需要的一些基本原理和结果，并规定一些记号. 这些内容是应力张量、守恒定律、应变张量和特性定律.

1.1 应力张量

设有一占据 R^3 的一开区域 Ω 的连续介质, R^3 中有一标准正交系 $Ox_1x_2x_3$. 该介质在外力的作用下处于平衡状态，外力一般由分布在Ω内的体积力和分布在Ω的边界上的表面力构成.

这些力在连续介质中产生一应力场，它可描述为：设M是Ω的一点，而 $\mathscr{S}$ 是过点M的一连续可微的二维流形，它至少在M的一邻域内把连续介质分成两个区域 Ω_1 和 Ω_2. 设 $\mathbf{n}$ 是 $\mathscr{S}$ 在点M指向 Ω_2 的单位法向量. 在实际中一般很好满足的假设[1]下，人们建立了下列关系：Ω_2 对 Ω_1 的作用等价于 $\mathscr{S}$ 上的一个力密度 $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ 依赖于点M和法向量 $\mathbf{n}$, 满足

$$F_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1,2,3;\ j = 1,2,3 \tag{1.1}$$

其中系数 σ_{ij} 依赖于点 M.

---

1) 这些假设相当于假定忽略一个可能的 $\mathscr{S}$ 上的力偶密度. 取消这一简化假设，就导出所谓的定向介质理论，其中应力张量不再是对称的. 关于这一课题，可参考：P. Casal[1], G. Duvaut[1],[2], A. E. Green 和 R. S. Rivlin[1], R. Hayart[1], R. D. Mindlin 和 H. F. Tiersten[1], A. C. Eringen 和 Suhubi[1], R. A. Toupin[1],[2].

F_i 和 n_j 是向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{n}$ 的分量。在方程(1.1)中，我们利用了关于重复指标求和的约定（除相反的声明本书将一直这样约定），即(1.1)表示

$$F_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$$

当在 $\mathbf{R}^3$ 中作基变换时，量 F_i 和 n_j 作为向量的分量而变换。因此 σ_{ij} 是二阶张量的分量，称之为应力张量。 ▯

这个张量的引入允许提出边界条件。事实上，设 Γ 是 Ω 的边界，且它是光滑的，$\mathbf{n}$ 是 Γ 的单位外法线。若 $\mathbf{F}$ 是在 Γ 的点作用在 Ω 上的外力的面密度，则在 Γ 的每一点我们有关系，

$$F_i = \sigma_{ij} n_j$$

因为外部介质起着 Ω_2 的作用。

1.2 守恒定律

连续介质的经典力学的公理或基本原理是质量、动量和能量守恒定律。

i) 质量守恒。设 $\mathbf{v}(M, t)$ 是在时间 t 相对于坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 运动的一连续介质的速度向量场。用 $\mathscr{S}$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中包含在连续介质占据的区域内的任一区域；这个区域含有一定体积的物质，即一定数目的质点；我们把 $\mathscr{S}$ 看作 $\mathbf{R}^3$ 中一区域，它在每一时刻包含这些质点，此即蕴含 $\mathscr{S}$ 是一个变动区域，它跟流体同时位移。质量守恒定律阐明：在其运动中所观察的任一区域 $\mathscr{S}$ 中所包含的物质的质量不随时间改变。由此推出

$$d/dt \iiint_{\mathscr{S}} \rho dx = 0, \quad \forall \mathscr{S} \tag{1.2}$$

其中：

$\rho = \rho(M, t)$ 是在点 M 于时刻 t 的密度，dx 是体积元 $dx_1dx_2dx_3$。

若速度场在 $\mathscr{S}$ 内连续，则积分方程(1.2)等价于逐点方程

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{Div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.3}$$

其中 Div($\rho\mathbf{v}$) 自然表示向量场 $\rho\mathbf{v}$ 的散度，即

$$\partial(\rho v_i)/\partial x_i$$

ii）动量守恒． 这个称之为动力学基本原理的守恒律可表述为：存在一（galileo）坐标系和一时钟 t，使得对所有物质系统和在每一时刻，作用在系统上的外力的转矩等于动量的转矩对时间的导数．

取 i) 中引入的体积 $\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$ 中的物质组成一个系统，对它我们能够应用上述的原理． 我们假设坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 和所考虑的时钟 t 是 galileo 的．

用化简到 O 的元素写出两个转矩的等式（见本节末尾的注 1.1），

$$(1.4)\qquad \int_{\mathscr{S}} f_i dx + \int_{\partial\mathscr{S}} \sigma_{ij} n_j dS = d/dt \int_{\mathscr{S}} \rho v_i dx,\quad \forall\mathscr{S}$$

$$(1.5)\qquad \int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx + \int_{\partial\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = d/dt \int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dx,\quad \forall\mathscr{S}$$

我们来说明记号和式中各项的意义．

分量为 $f_i(i=1,2,3)$ 的向量 $\mathbf{f}$ 表示外力（例如重力）的体分布．因而 $\int_{\mathscr{S}} f_i dx$ 是体积力的合力的第 i 个分量．

系统 $\mathscr{S}$ 在其边界 $\partial\mathscr{S}$ 上承受一个（按照 1.1 节）面密度为 $\sigma_{ij}n_j$ 的力．因之 $\int_{\partial\mathscr{S}} \sigma_{ij} n_j dS$ 表示作用在系统 $\mathscr{S}$ 上的表面力的合力的第 i 个分量．$\partial\mathscr{S}$ 上的面积元记为 dS．

$d/dt \int_{\mathscr{S}} \rho v_i dx$ 表示动量的合向量对时间的导数的第 i 个分量．

ε_{ijk} 是三阶完全反对称（对于正交规范基的协变）张量的分量，这里 $\varepsilon_{123}=+1$（见本节末的注 1.2）．

方程 (1.5) 的前两项是作用在 $\mathscr{S}$ 上的体积力和表面力对 O

的合力矩的第 i 个分量

(1.5) 的右端是对 O 的动量矩的第 i 个分量对时间的导数.

变换(1.4)中的面积分为体积分，利用质量守恒律并假定积分号下的诸量充分正则,可以看出,(1.4)等价于

(1.6) $$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho\gamma_i, \quad i = 1,2,3$$

其中令

(1.7) $$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

(1.8) $$X_{,j} = \partial X / \partial x_j$$

γ_i 是位于坐标为 (x_i) 的质点在时刻 t 的加速度的第 i 分量. 注意, γ_i 的表达式和方程 (1.6) 包含一个关于速度分量的非线性项.

方程(1.6)称为运动方程.

若我们考虑静力问题 ($\mathbf{v} = 0$), 则方程 (1.6) 的右端恒等于零,称之为平衡方程;关于应力张量的分量 σ_{ij}, 方程是线性的.

变换曲面积分为体积分并利用质量守恒定律和运动方程，方程(1.5)可以简化为

(1.9) $$\int_{\mathscr{S}} \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} dx = 0, \quad \forall \mathscr{S}$$

这等价于

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$$

即

(1.10) $$\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$$

因而应力张量是对称的. □

以下两个注实际是回顾转矩和分量为 ε_{ijk} 的张量.

注 1.1 设有

a) 自由向量 $\mathbf{R}$, 称为转矩的合向量,

b) 在每一点 P 定义的向量场 $\mathbf{M}(P)$:

(1.11) $$\mathbf{M}(Q) = \mathbf{M}(P) + \mathbf{QP} \wedge \mathbf{R}$$

则 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{M}(P)$ 的集合称为转矩, $\mathbf{R}$ 称为转矩的合向量, $\mathbf{M}(P)$ 称

为转矩在P的合力矩。起点为A的两个向量$\mathbf{R}$和$\mathbf{M}(A)$称为转矩的化简到A的元素。可见，一个转矩由化简到一个点的元素完全确定。□

注 1.2 上节定义的ε_{ijk}对于计算是方便的，这是由于它们满足下列关系

(1.12) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

(1.13) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

(1.14) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$$

(1.15) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

量δ_{ip}是 Krönecker 张量的分量，即

$$\delta_{ip} = 0, \quad i \neq p$$
$$\delta_{ip} = 1, \quad i = p$$

关系(1.12)利用ε_{ijk}的反对称性化到情形$(i, j, k) = (p, q, r) = (1, 2, 3)$来证明。关系(1.13)，(1.14)和(1.15)可由(1.12)出发逐步证明。

ε_{ijk}出现在两个向量的向量积的第i个分量、向量场的旋量以及3×3矩阵的行列式的展开式中，实际上，容易验证

(1.16) $$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$$

其中$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$是分量分别为(a_i)和(b_i)的向量，而

(1.17) $$(\mathrm{Rot}\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk}v_{k,j}$$

其中$\mathbf{v}$是分量为(v_k)的向量场。

又

(1.18) $$\varepsilon_{ijk}\mathrm{Det}M = \varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

(1.19) $$\mathrm{Det}M = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}M_{ip}M_{jq}M_{kr}$$

其中M是元素为(M_{ij})的3×3矩阵。

当M是一正向(即$\mathrm{Det}M = +1$)正交规范基的变换矩阵时，

(1.18) 说明 ε_{ijk} 是对这样的基变换的三阶张量的元素.

最后在 $\mathrm{Det}M\neq 0$ 时,设 M^{-1} 是矩阵M的逆矩阵,M^{-1} 的元素给定为

$$(1.20)\qquad (M^{-1})_{ij}=(2\mathrm{Det}M)^{-1}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}M_{pr}M_{qs}$$

由这几种关系易得经典公式:

$$\mathrm{Det}(A\cdot B)=(\mathrm{Det}A)\cdot(\mathrm{Det}B)$$

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$\mathrm{Rot}\ \mathrm{Rot}\mathbf{v}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v},$$ 等等. □

iii) 能量守恒. 这定律亦称为热力学第一定律. 它是说,一个系统的总能量(内能+动能)对时间的导数等于外部作用力的功率加单位时间流入系统的能量.

把上述定律应用到前面引入的物质系统,我们有

$$(1.21)\qquad d/dt\int_{\mathscr{S}}\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+e\right)dx=\int_{\mathscr{S}}f_iv_idx+\int_{\partial\mathscr{S}}\sigma_{ij}n_jv_idS+\int_{\mathscr{S}}\rho w dx-\int_{\partial\mathscr{S}}q_in_idS$$

e 表示连续介质的内能密度,因此 $\int_{\mathscr{S}}\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+e\right)dx$ 表示所考虑系统的总能量.

$\int_{\mathscr{S}}f_iv_idx$ 和 $\int_{\partial\mathscr{S}}\sigma_{ij}n_jv_idS$ 分别为体积力和表面力的功率.

w 表示单位质量和单位时间内流入的能量,因而 $\int_{\mathscr{S}}\rho w dx$ 表示单位时间内流入系统 $\mathscr{S}$ 的能量.

分量为 q_i 的向量 $\mathbf{q}$ 是能量的转移向量,而 $-\int_{\partial\mathscr{S}}q_i-n_idS$ 表示单位时间内从表面流入的能量.

利用方程 (1.3), (1.6), (1.10) 并把面积分变为体积分,可以化简方程 (1.21). 我们有

$$(1.22)\qquad \int_{\mathscr{S}}\rho(de/dt)dx=\int_{\mathscr{S}}\sigma_{ij}v_{i,j}dx+\int_{\mathscr{S}}(\rho w-q_{i,i})dx$$

引进分量为

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{1.23}$$

的应变速度张量。

方程 (1.22) 既对任意 $\mathscr{S}$ 都成立，它便等价于方程

$$\rho de/dt = \sigma_{ij}D_{ij} + \rho w - q_{i,i} \tag{1.24}$$ □

摘要 诸守恒律为我们提供了三个方程或方程组

1) 连续性方程

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{Div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.25}$$

2) 运动方程

$$\rho\gamma_i = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{1.26}$$

3) 能量方程

$$\rho de/dt = \sigma_{ij}D_{ij} + \rho w - q_{i,i} \tag{1.27}$$

分量为 σ_{ij} 的应力张量是对称的。 □

注 1.3 从守恒律出发，在连续性假设下，我们导出了逐点方程(1.25)，(1.26)，(1.27)。反之，若在介质内部存在一速度或应力张量分量的不连续的线，则人们证明了（P. Germain[2]）在这条线上，偏微分方程(1.25)—(1.27)应当用不连续性关系代替。

只要把有关的导数按分布意义解释，这些不连续性条件就可以被包含在关系 (1.25)—(1.27) 之中。 □

注 1.4 方程 (1.25)—(1.27) 总共包含五个标量方程，未知函数是十四个：

i) 应力张量(对称的)的六个分量 σ_{ij}；

ii) 速度的三个分量；

iii) 密度 ρ，内能 e，能转移向量的分量 q_i。

比较了这些数目，从简单的数学观点看，显然不能由这五个方程确定十四个未知函数!

另外，从物理观点看，必须注意，所表述的守恒律应普遍适用于所有连续介质，液体、固体或气体。如果由这些定律得到的方程 (1.25)—(1.27) 足以确定这些参量，这意味着在所指出的条件之下，不同的连续介质将有相同的特性。这当然是荒谬的。

因此，上述的守恒律本身对于刻划连续介质的运动是不充分的；它们还应补充以其它关系，可用特性定律这个一般名词称呼这种关系。为此，首先必须定义应变张量。

1.3 应变张量

i）运动学描述

设运动中的一连续介质在时刻 t 占据 $\mathbf{R}^3$ 中的一个开集 Ω，$\mathbf{R}^3$ 中有一正向标准正交基 $Ox_1x_2x_3$。

设 (a_α) $(\alpha=1,2,3)$ 是在时刻 t 位于坐标为 (x_i) 的点的物质质点在时刻 0 的位置的分量。跟每一质点的物理实际相应，我们假设在同一质点的 (a_α) 和 (x_i) 之间存在一一对应关系

$$(1.28)\qquad \begin{cases} a_\alpha = g_\alpha(x,t), & \alpha=1,2,3, \quad x=(x_1,x_2,x_3) \\ x_i = f_i(a,t), & i=1,2,3, \quad a=(a_1,a_2,a_3) \end{cases}$$

如果关系(1.28)假定为连续的，则它同样建立开集 Ω 和开集 Ω_0 之间的一个对应，Ω_0 是在时刻 t 位于 Ω 内的质点在时刻 $t=0$ 所占据的位置的集合。 分量 (a_α) 是所考虑的质点的 Lagrange 坐标，而 (x_i) 是在时刻 t 的 Euler 坐标。

ii）应变的梯度

在变换(1.28)下，分量为 (da_α) 的无穷小向量 $d\mathbf{M}_0$，在时刻 t 变为分量为

$$(1.29)\qquad dx_i = x_{i,\alpha}da_\alpha$$

的无穷小向量 $d\mathbf{M}$ 或

$$(1.30)\qquad d\mathbf{M} = \mathbf{F}d\mathbf{M}_0$$

其中 $\mathbf{F}$ 表示分量为由

$$(1.31)\qquad F_{i\alpha} = f_{i,\alpha} = x_{i,\alpha}$$

给定的 $F_{i\alpha}$ 的张量。张量 $\mathbf{F}$ 称为应变的梯度张量。

iii）膨胀张量

设有起点为 $M_0\in\Omega_0$ 的两个无穷小向量 $d\mathbf{M}_0$ 和 $\delta\mathbf{M}_0$；在时刻 t 它们变为起点在 M 的两个无穷小向量 $d\mathbf{M}$ 和 $\delta\mathbf{M}$，且满足

$$d\mathbf{M} = \mathbf{F}d\mathbf{M}_0,\quad \delta\mathbf{M} = \mathbf{F}\delta\mathbf{M}_0$$

若知道在所有时刻 t 的内积 $d\mathbf{M}^2$, $d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M}$, $\delta\mathbf{M}^2$, 我们就知道物质元 $d\mathbf{M}$ 和 $\delta\mathbf{M}$ 的长度和夹角;而

(1.32) $$d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M}=x_{i,\alpha}x_{i,\beta}da_\alpha\delta_{\alpha\beta}$$

故这些长度和夹角由元素 $C_{\alpha\beta}$ 即可得到, $C_{\alpha\beta}$ 由下式给定

(1.33) $$C_{\alpha\beta}=x_{i,\alpha}x_{i,\beta}$$

它们是二阶对称张量的分量,该张量称为膨胀张量并记为 $\mathbf{C}$. 还有关系

(1.34) $$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

其中 $\mathbf{F}^T$ 是张量 $\mathbf{F}$ 的转置张量,而 $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ 是矩阵乘积。

若连续介质象刚体一样位移,即无形变,则

(1.35) $$d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M}=d\mathbf{M}_0\cdot\delta\mathbf{M}_0,\ \forall d\mathbf{M}_0,\ \delta\mathbf{M}_0$$

(1.35) 蕴含

(1.36) $$\mathbf{C}=\mathbf{1}$$

这里 $\mathbf{1}$ 表示单位张量,即分量为 $(\delta_{\alpha\beta})$ 的张量. 反之,(1.36) 蕴含 (1.35),因此: 一连续介质位移而无形变的充分必要条件是(1.36)成立。

(iv) 应变张量. 这是由

(1.37) $$\mathbf{X}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{1})$$

定义的张量,写成分量形式为

(1.38) $$X_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(C_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta})$$

由此得, 一连续介质位移而无形变的充分必要条件是应变张量为零.

引入位移向量 $\mathbf{u}$,

(1.39) $$u_i=x_i-a_i,\quad i=1,2,3$$

即得

$$F_{i\alpha}=u_{i,\alpha}+\delta_{i\alpha}$$

由此

(1.40)
$$X_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+u_{i,\alpha}u_{i,\beta})$$

可见应变张量由关于位移向量 $\mathbf{u}$ 的分量的非线性方式表示。

v) 线性化的应变张量．若位移向量 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(a,t)$ 随 a 缓慢变化，则偏导数 $u_{i,\alpha}$ 是小量，应变张量本身也是小量．此时即说是小变形的．假定量 $u_{i,\alpha}$ 是 ε 阶的（ε 是趋于零的参数），量 $u_{i,\alpha}u_{i,\beta}$ 将是 ε^2 阶的，故

(1.41)
$$X_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\varepsilon^2\text{ 阶的项}$$

分量为 $\varepsilon_{\alpha\beta}(u)$ 的张量称作线性化应变张量，其中

(1.42)
$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u)=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})$$

注 1.5 我们曾在(1.23)中引进应变速度张量 $\mathbf{D}$．这里我们要说明这个称呼的合理性．

求内积 $d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M}$ 对时间的导数，而点 M_0 和无穷小向量 $d\mathbf{M}_0$，$\delta\mathbf{M}_0$ 保持固定，则有

(1.43)
$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M})=\frac{d}{dt}(d\mathbf{M})\cdot\delta\mathbf{M}+d\mathbf{M}\cdot\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{M})$$

但我们有

$$\left(\frac{d}{dt}d\mathbf{M}\right)_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}da_\alpha\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial a_\alpha}da_\alpha$$
$$=\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\alpha\partial t}da_\alpha$$

而由于

$$\partial x_i(a,t)/\partial t=v_i$$

故

(1.44)
$$\left(\frac{d}{dt}d\mathbf{M}\right)_i=v_{i,\alpha}da_\alpha=v_{i,j}x_{j,\alpha}da_\alpha=v_{i,j}dx_j$$

对 $\left(\frac{d}{dt}\delta M\right)_i$ 作同样的计算，代入(1.43)，即得

(1.45)
$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{M})=2D_{ij}dx_i\delta x_j$$

这就说明了为什么分量为 D_{ij} 的张量称为应变速度张量。▯

1.4 特性定律

特性定律没有 1.2 节中研究的守恒律的普遍适用的特征。反之，它们刻画每一类型的连续介质的特性。它们常常来源于实验，尽管它们具有若干不变性质（W. Noll 和 C. Truesdell[1]，C. Truesdell 和 R. Toupin[1]）。一般说来，这是应力张量、应变张量、应变速度张量、温度和热流向量之间的关系。▯

这里我们不列出"所有"类型的连续介质及其相应的特性定律。在每一章中我们引进所考虑的特性定律并利用上述的一般原理写出制约条件的方程和不等方程组。对于第一章里所研究的现象，我们立即要做的正是这些。

2.（热学、多孔介质中的流体力学、电学中半导体中的）半渗透壁和温度控制问题

2.1 方程的建立

2.1.1 热学方程

热学研究连续介质的温度场，假定形变现象是独立的[1]，速度是可以忽略的，这是为了使方程（1.25）—（1.27）线性化。它们变为

(2.1) $$\partial\rho/\partial t = 0$$

(2.2) $$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

(2.3) $$\rho\partial e/\partial t = \rho w - q_{i,i}$$

采用的特性定律是

(2.4) σ_{ij} 不依赖于温度

(2.5) $$e = C\theta$$

(2.6) $$q = -\widetilde{\mathrm{K}}\operatorname{grad}\theta$$

1) 即介质的形变不引起温度的变化。

记号意义如下所述：

i）系数 c 是比热，且为严格正数．在实际中，随物质的不同，c 或多或少依赖于温度．这里假定 c 只依赖于 x．

ii）(2.6) 是著名的 Fourier 定律．当二阶张量 $\tilde{\mathbf{K}}$ 仅依赖于 x 时它是线性的．这跟实际情形并不十分相符，对某些物质，人们可观察到 $\tilde{\mathbf{K}}$ 随温度显著地变化．

这里我们只保留线性定律，或由于所考虑的物质满足它，或温度的变化充分小，因而在平均温度附近线性化是合理的．

此外，我们将假定

$$\tilde{K}_{ij}x_i \cdot x_j \geqslant k_0 x_i \cdot x_i, \quad k_0 \text{ 是 } > 0 \text{ 的常数} \tag{2.7}$$

物理上这能被很好满足．若物质是各向同性的，张量 $\tilde{\mathbf{K}}$ 是球面的，即

$$\tilde{K}_{ij} = \tilde{k}\delta_{ij}$$

$\tilde{k}$ 则是物质的热传导系数． □

方程 (2.1) 指出，密度 ρ 不依赖于时间；它可能依赖于 x，但它对热学问题是已知量． □

方程 (2.4) 蕴含，方程 (2.2) 和 (2.3) 是独立的，因此，温度满足唯一的方程

$$\rho C\partial\theta/\partial t - (\tilde{K}_{ij}\theta_{,i})_{,j} = \rho w \tag{2.8}$$

若设——并非必需，但为简化证明以下我们一直这样做——介质是均匀各向同性的，(2.8) 除以常数 ρC，即得

$$\partial\theta/\partial t - k\Delta\theta = g \tag{2.9}$$

其中令

$$k = \tilde{k}/\rho C, \quad g = w/C$$

k 是正常数，而 $\Delta = \partial^2/\partial x_i\partial x_i$． □

2.1.2 多孔介质流体力学方程

方程 (2.9) 还描述多孔介质中粘性流体的流动现象 (A. Houpeurt[1], Muskat[1],[2])，故又称为扩散方程．

从质量守恒律得到这个方程，在多孔介质情形，该守恒定律可表为

$$\varphi\partial\rho/\partial t + \mathrm{Div}(\rho\mathbf{v}) = g$$

其中标量 φ 表示介质的孔隙系数.

在多孔介质中,速度 $\mathbf{v}$ 和压强场 $u(x,t)$ 满足

$$\mathbf{v} = -K \operatorname{grad} u$$

这就是著名的 Darcy 定律,其中 K 表示介质的渗透率. 有两种情形要考虑:

α) 流体是少许可压缩的(液体)

密度和压强之间的关系由

$$\rho = \rho_0[1 + c(u - u_0)]$$

给定,其中 c 是可压缩性系数,比起 1 来是小的量; 在质量守恒方程中, $\rho\mathbf{v}$ 跟 $\rho_0\mathbf{v}$ 差别很小,因此 u 很精确地满足方程

$$c\varphi\partial u/\partial t - \operatorname{Div}(K \operatorname{grad} u) = g$$

当多孔介质是均匀各向同性时,它跟方程(2.9)相同.

β) 流体是绝热流动中的理想气体

压强和密度之间的关系是 (Mariotte 定律)

$$u = C\rho$$

这里 C 为常数. 由质量守恒定律给出

$$\varphi\partial\rho/\partial t - \operatorname{Div}(C\rho K \operatorname{grad} \rho) = g$$

或对压强函数 u 有

$$\varphi\partial u/\partial t - \operatorname{Div}(Ku \operatorname{grad} u) = Cg$$

这是非线性的. □

2.1.3 电学方程

电磁学一般方程将在第七章讨论. 这里我们只简单指出, 在一没有自由电荷的导电介质中,电荷守恒方程为

$$\operatorname{Div} J = g$$

其中 J 表示电流向量.

另外,

$$J = \sigma E$$

这里 E 是电场向量,而 σ 是介质的导电率. 在稳定情形,电场产生一电位势 u, 满足

$$E = - \operatorname{grad} u$$

于是电荷守恒最终写成

$$-\operatorname{Div}(\rho \operatorname{grad} u)=g$$

对于稳定现象，这正是(2.9)类型的方程. ▯

2.2 半渗透壁

注 2.1(预备性的) 以后设方程(2.9)中的 $k=1$，这相当于改变时间尺度使方程规范化. 另外，我们总记 u 为未知函数，它将根据情况表示温度、压力或电位势，并满足方程

(2.10) $$\partial u/\partial t-\Delta u=g$$

在与方程(2.10)相联系的古典问题中，边界上的给定值是 u 或 $\partial u/\partial n$ (u 在边界上的法向导数)后者表示热的、物质(流体)的或电的流量.

这里我们将与前面一样自然地引进一类新型的问题，但在(边界或其它)条件中要涉及不等式，从而导出了不等方程.

在作物理解释时所用的语言来自多孔流体力学，因为这样叙述非常直观. 我们可以借助下列对照表从一个领域转到另一领域.

热 学	流体力学	电 学
温度	压力	位势
热	流体	电
热通量	流体的流量	电通量
导热介质	多孔介质	导电介质
半穿透的	半渗透的	半导电的

应该注意，电学上的对应物只适用于稳定解或稳定现象.

我们总以 Ω 记所考虑的 $\mathbf{R}^n(n\leqslant 3)$ 中的开集；其边界 $\partial\Omega=\Gamma$ 是光滑的，其单位外法线向量为 n. Ω 被多孔介质所占据且在其中分布着一个不易压缩的粘滞流体的压强场.

2.2.1 厚度可忽略的壁

设边界 Γ 由一个厚度可以忽略的半渗透的薄膜组成，所谓半渗透是说它允许流体自由进入 Ω 但反之流体不能有任何流出.

于是在 Ω 的外部有一由 $h(x)(x\in\Gamma)$ 给定的流体的压力作用在边界 Γ 上。对边界的不同点 x 可能有两种情形

i) $h(x)<u(x,t)$

在边界的同一点 x，外部压力 $h(x)$ 小于内部压力 $u(x,t)$。因而流体有从 Ω 逸出的趋势，但半渗透壁阻止它，因此在该点穿过壁的流量是零，于是 $q\cdot n=0$。由于 $q=-k\,\mathrm{grad}\,u$，故

$$\partial u/\partial n=0$$

ii) $h(x)\geqslant u(x,t)$:

在边界的同一点 x，外部压力超过或等于内部的压力 $u(x,t)$；因而，流体有进入 Ω 的趋势，器壁正有利于此，于是

$$q\cdot n\leqslant 0$$

但 $q\cdot n=-\hat{k}\partial u/\partial n$ 是有限的，这就要求 $u(x)$ 沿法线 n 在 x 的邻近连续。由于薄壁的厚度可以忽略，因此 $h(x)=u(x,t)$。从而薄壁的性质是在边界点的压强 $u(x,t)$ 不能严格小于外部的压强 $h(x)$。

简言之，所提的"半渗透壁"问题如下：

寻求 $u(x,t)$，它在 Ω 满足(2.10)，在 Γ 上满足条件

$$\begin{cases} h(x)<u(x,t)\Rightarrow \partial u/\partial n=0 \\ h(x)=u(x,t)\Rightarrow \partial u/\partial n\geqslant 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

还满足初条件

$$u(x,0)=u_0(x).\quad \square$$

注 2.2 人们可能要问，在实际中是否存在这样的壁：

i) 一个活门可看作这种情形的局部近似的实现(见后面的变形 1)；

ii) 可以设想能够接近上述现象的各种物理装置。这导致我们提出上述问题的各种变形。

2.2.2 厚度有限的壁

跟上述情形一样，只允许流体进入的壁承受一个外部流体的压强 $h(x)$。可能有两种情形：

i) $h(x)<u(x,t)$

Ω内部的流体有从Ω流出的趋势，但半渗透壁阻止它，因此在Γ的点上流量为零，即

$$\partial u/\partial n = 0$$

ii) $h(x) \geqslant u(x,t)$

流体有穿过厚度有限的壁进入Ω的趋势．这时假设穿过此壁的流量正比于压强之差是合理的，即有

$$-\partial u/\partial n = k(u - h)$$

这里k为正数，是壁的渗透性的一个测度．

总之，在这种容器中的压强u满足(2.10)，初条件和边条件

$$(2.12)\qquad \begin{cases} u > h \Rightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ u \leqslant h \Rightarrow \partial u/\partial n = -k(u-h) \end{cases}$$

□

注 2.3 若壁的渗透系数是零，流体既不能流进也不能流出，则压强u是古典 Neuman 问题的解，这问题将随情况不同而成为定常的或瞬时的．□

注 2.4 若渗透系数k趋于无穷，则条件(2.12)在极限情形变为条件(2.11)．实际上我们要证明[1]，若u_k是对应渗透系数k的解，则当$k\to\infty$时，u_k在某种意义下趋于u；u表示"半渗透薄壁"问题的解．□

我们还要指出上述问题的两个自然变形．

变形 1．半渗透壁不构成整个边界Γ而仅是它的一个非空部分Γ_1．在$\Gamma-\Gamma_1$上，它服从一个古典条件：或是压强给定，或是流量给定．□

变形 2．半渗透壁是"反向的"，即它只允许流体流出．在这个壁上的条件变为

i) 若壁是薄的，则

$$(2.11')\qquad \begin{cases} u < h \Rightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ u = h \Rightarrow \partial u/\partial n \leqslant 0 \end{cases}$$

ii) 若壁是有有限厚度的，则

---

1) 见5.2．

(2.12′) $\begin{cases} u < h \Rightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ u \geqslant h \Rightarrow -\partial u/\partial n = k(u-h) \end{cases}$ ▯

2.2.3 Ω 内部的半渗透隔板

容器 Ω 具有一个承受压强 h（古典条件）的边界 Γ. 另外，在 Ω 内部有一个半渗透板，它是一个二维流形 Σ，至少在 Σ 邻近把 Ω 分割为两个区域，分别记作 1 和 2（图 1）. Σ 的指向区域 2 的单位法向量记作 n. 分别以 u_1 和 u_2 记 Σ 上在区域 Ω_1 和 Ω_2 两侧的压强，假定板只允许流体由 1 流向 2，Σ 上的条件是:

i）若板是薄的；则

(2.11″) $\begin{cases} u_1 < u_2, \ \partial u/\partial n = 0 \\ u_1 = u_2, \ \partial u/\partial n \leqslant 0 \end{cases}$

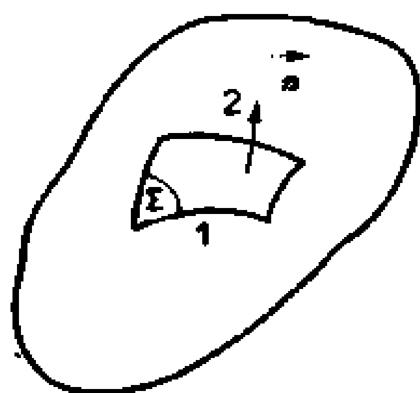


图 1

ii）若板是厚度有限的，则

(2.12″) $\begin{cases} u_1 < u_2 \Longrightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ u_1 \geqslant u_2 \Longrightarrow -\partial u/\partial n = k(u_1-u_2) \end{cases}$ ▯

2.2.4 通过一个半渗透壁的体注入

容器 Ω 在其边界服从经典条件，例如压强是给定的. 另外，它接受一个外加的体流量 $g(x,t)$ 和一个附加的体流量 $\tilde{g}(x,t)$（穿过一半渗透壁，或一般地由一个伺服机调节）. $\tilde{g}$ 满足下列条件中的一个.

(2.13) $\begin{cases} u > h \Longrightarrow \tilde{g} = 0 \\ u = h \Longrightarrow \tilde{g} \geqslant 0 \end{cases}$

或

$$(2.14)\qquad \begin{cases} u > h \Longrightarrow \tilde{g} = 0 \\ u \leqslant h \Longrightarrow \tilde{g} = k(h - u) \end{cases}$$

其中 $h(x)$ 是在 Ω 内给定的一个压强场。压强 u 在 Ω 内满足方程

$$(2.15)\qquad \partial u/\partial t - \Delta u = g + \tilde{g} \quad \square$$

注 2.5 2.2 节所提的问题本质上是非稳定的。但若去掉初条件，它们可能在某些条件下具有稳定解。从物理观点看寻求这种解是有意义的，因为这些解相应于整体热平衡的状态。

从物理上考虑，我们注意，这些稳定解并非总是存在的，就是它们存在，也不一定唯一。事实上，我们考虑一个稳定问题：寻求 $u(x)$，满足

$-\Delta u = g$，Ω 内

$$\left.\begin{array}{l} u > h \Longrightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ u = h \Longrightarrow \partial u/\partial n \geqslant 0 \end{array}\right\} \Gamma \text{ 上}$$

这里，壁只允许热量进入，因此

i) 若 $\int_\Omega g dx > 0$，即有一个整体的热源，则温度应当在某些点严格上升，因而无解。

ii) $\int_\Omega g dx = 0$，可能有一个解 u；此解应在 Γ 上几乎处处满足 $\partial u/\partial n = 0$，因此 $\forall C \geqslant 0$，$u + C$ 也是解。

iii) $\int_\Omega g dx < 0$，此时可能有一个解。它相应于一个等于零的热量，即

$$\int_\Omega g dx + \int_\Gamma (\partial u/\partial n) d\Gamma = 0$$

2.3 温度控制

这里借用热现象中的术语。所研究的连续介质占据 $\mathbf{R}^n(n \leqslant 3)$ 中的一个边界为 Γ 的区域。

我们区别两种类型的温度控制：由边界温度调节的边界温度

控制 (2.3.1)；由内部温度调节的内部温度控制 (2.3.2)。

2.3.1 由边界温度调节的边界温度控制

对 $x \in \Gamma$，我们给定两个参照温度 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，$h_1(x) \leqslant h_2(x)$，我们要求边界上的温度偏离区间 $(h_1(x), h_2(x))$ 尽可能小。为此，我们设置一些"温度控制器"，即一些通过边界注入(在代数意义上)适当热流的装置。这些装置的能力是有限制的，注入的热通量以 $-\partial u/\partial n$ 测度，保持在闭区间 $[g_1, g_2]$ 中，$0 \in [g_1, g_2]$。

我们以下述方式调节这些温度控制器。

i) 若 $u(x,t) \in [h_1(x), h_2(x)]$，即温度在所希望的间隔内，不要做任何校正，因此我们要求

$$\partial u/\partial n = 0 \tag{2.16}$$

ii) 若 $u(x,t) \notin [h_1(x), h_2(x)]$，我们在可能条件下，以下述方式注入正比于 $u(x,t)$ 和区间 (h_1, h_2) 之间的偏离的热量，

$$\left\{\begin{aligned} &u(x,t) > h_2(t) \Longrightarrow -\partial u/\partial n = +k_2(u-h_2), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{若 } +k_2(u-h_2) \leqslant g_2 \\ &\quad -\partial u/\partial n = g_2, \quad \text{若 } +k_2(u-h_2) > g_2 \\ &u(x,t) < h_1(t) \Longrightarrow -\partial u/\partial n = +k_1(u-h_1), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{若 } +k_1(u-h_1) \geqslant g_1 \\ &\quad -\partial u/\partial n = g_1, \quad \text{若 } k_1(u-h_1) < g_1 \\ &\qquad\qquad (k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 是正数}) \end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

如引入函数 Φ，条件 (2.16)，(2.17) 可用更简单的方式表达，Φ 的定义是

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= g_1, \quad \text{若 } \lambda \leqslant h_1 + g_1/k_1 \\ &= k_1(\lambda - h_1), \quad \text{若 } h_1 + g_1/k_1 < \lambda \leqslant h_1 \\ &= 0, \quad \text{若 } h_1 \leqslant \lambda \leqslant h_2 \\ &= k_2(\lambda - h_2), \quad \text{若 } h_2 < \lambda \leqslant h_2 + g_2/k_2 \\ &= g_2, \quad \text{若 } \lambda \geqslant h_2 + g_2/k_2 \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

其图形如图 2 所示。

这时条件(2.16)，(2.17)等价于

$$-\partial u/\partial n = \Phi(u) \tag{2.19}$$

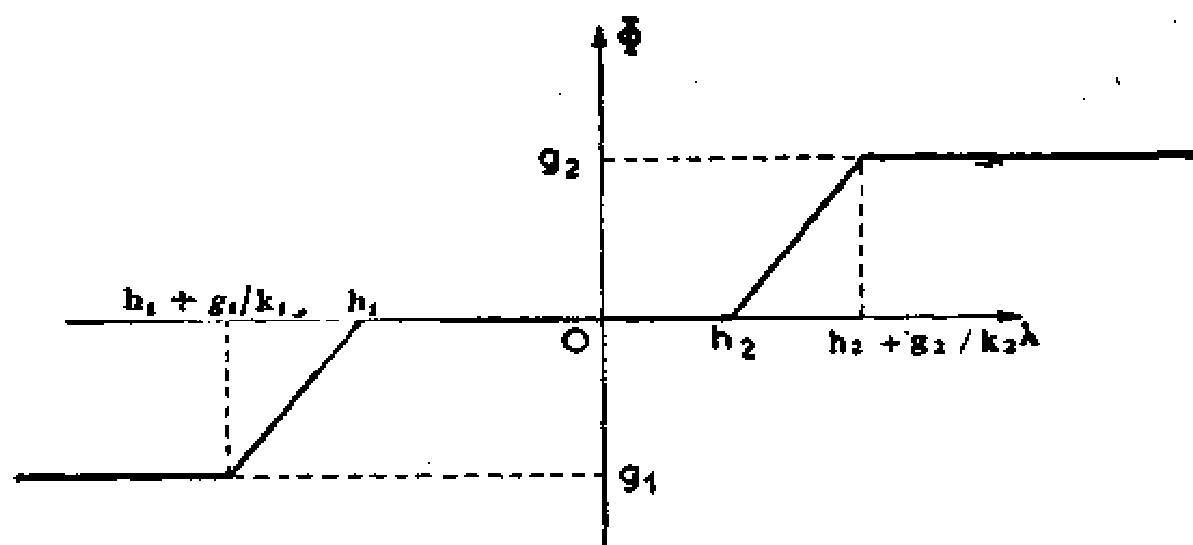


图 2

总之，温度控制问题的解应当在Ω内满足(2.10)，在Γ上满足(2.19)，和初条件

(2.20) $$u(x,0)=u_0(x)$$

这一问题有几种有趣的特殊的和极限的情况：

α) $h_1=h_2$。温度控制由唯一的参照温度实现。

β) $h_1=h_2$，$k_1=k_2$，$g_2=+\infty$，$g_1=0$。我们又遇到一个厚度有限的半渗透壁问题中的条件。对应的 Φ 的图形如图 3 所示。

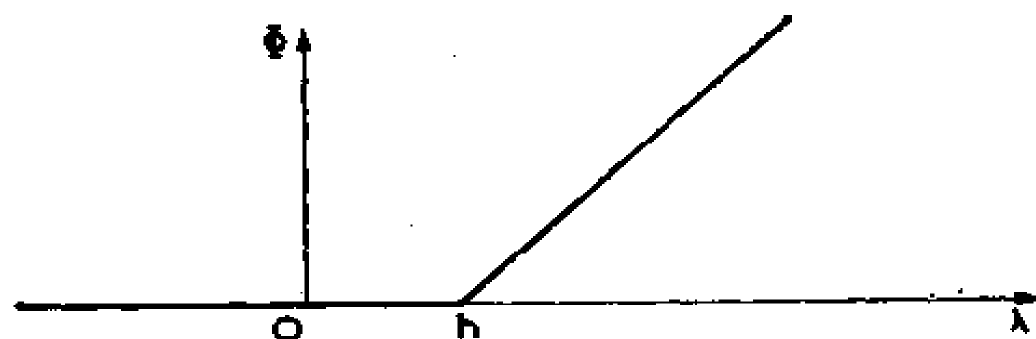


图 3

γ) $h_1=h_2$，$k_1=k_2=+\infty$，$g_1=0$，$g_2=+\infty$。我们又发现薄半渗透壁问题中的条件。相应的函数Φ的图形如图 4 所示。注意，此时函数$\Phi(\lambda)$是多值函数。

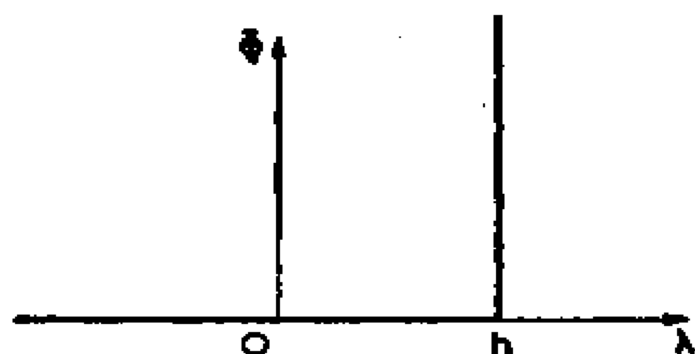


图 4

д) $h_1 < h_2$, $k_1 = k_2 = +\infty$, $g_2 = -g_1 = +\infty$. 温度控制以完美的方式得到，因 u 保持在区间 $[h_1, h_2]$ 之内. 函数 Φ 的图形如图 5 所示. 函数 Φ 也是多值的.

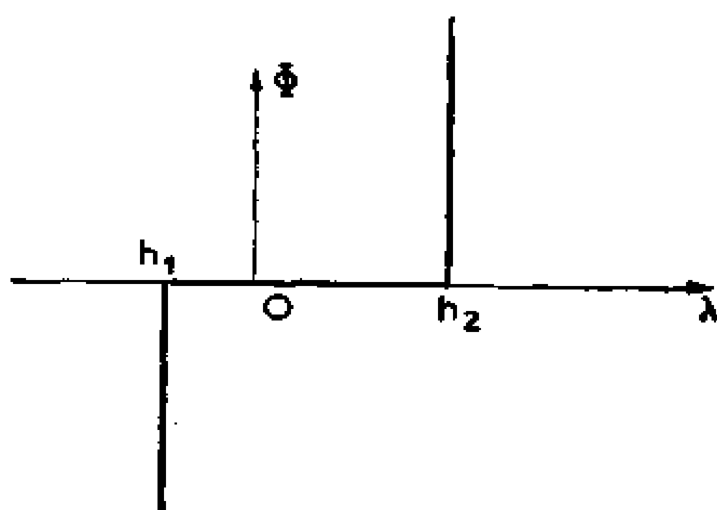


图 5

е) $h_1 = h_2$, $k_1 = k_2 = +\infty$, $g_2 = -g_1 = +\infty$. 温度 u 在边界上给定. 这是 Dirichlet 问题. ▯

注 2.6

推广 把 (2.19) 代之以

$$-\partial u/\partial n = \Phi(u) \tag{2.19'}$$

上述问题便可推广. 这里 Φ 是 u 的连续增函数，或更一般些，Φ 是一个多值的，增的，极大的函数（即图形是 R^2 中的一连续曲线）. ▯

2.3.2 由内部温度调节的温度控制

对 $x\in\Omega$，我们给定两个温度 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，$h_1(x)\leqslant h_2(x)$，我们希望对 $x\in\Omega$，温度 $u(x)$ 偏离区间 (h_1,h_2) 尽可能地小。为此，我们放置体热源(在代数意义下)。这些装置有一个有限的能力，因此这就限制了热通量 $-\tilde{g}$。假定 $\tilde{g}$ 保持在闭区间 $[g_1,g_2]$ 内，$0\in[g_1,g_2]$。

热的注入按下列方式调节：

i) 若在时刻 t，$u(x,t)\in[h_1(x),h_2(x)]$，即温度是在所选定的区间内，则不必进行校正，因而

$$\tilde{g}=0 \tag{2.21}$$

ii) 若 $u(x,t)\notin[h_1(x),h_2(x)]$，我们注入正比于 $u(x)$ 和区间 $[h_1(x),h_2(x)]$ 之间的偏差的热量，如果这是可能的话。由此

$$\left|\begin{array}{l} u(x,t)>h_2(x)\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}-\tilde{g}=k_2(u-h_2),\\ \text{若 } k_2(u-h_2)\leqslant g_2\\ -\tilde{g}=g_2,\\ \text{若 } k_2(u-h_2)>g_2\end{array}\right.\\ u(x,t)<h_1(x)\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}-\tilde{g}=k_1(u-h_1),\\ \text{若 } k_1(u-h_1)\geqslant g_1\\ -\tilde{g}=g_1,\\ \text{若 } k_1(u-h_1)<g_1\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{2.22}$$

(2.21)和(2.22)可概括为

$$-\tilde{g}=\Phi(u) \tag{2.23}$$

这里 $\Phi(u)$ 是由(2.18)定义的函数。

因而 u (温度)满足

$$\partial u/\partial t-\Delta u=g-\Phi(u),\ \text{在 } \Omega\times]0,T[\text{中} \tag{2.24}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \tag{2.25}$$

和在边界 Γ 上的古典边条件，例如

$$u(x,t)=\theta(x,t),\ x\in\Gamma \tag{2.26}$$

这里 θ 是在 Γ 上给定的温度。

注 2.7

推广　如前所述，我们可考虑特殊情形和极限情形，其中 $\Phi(u)$ 是多值的，其图象是增的且极大的。□

注 2.8　可以考虑其它类型的温度控制，使之涉及到平均温度和"代价"函数。它们导致最优控制问题。

例　给定温度区间 $[\theta_1(t),\theta_2(t)]$，$\forall t$，$\theta_1(t)<\theta_2(t)$；希望在开集 Ω 内，把每一时刻的平均温度 $\bar{u}(t)$ 维持在区间 $[\theta_1,\theta_2]$ 内。为此设置穿过 $\partial\Omega=\Gamma$ 的可以调节的热源。

人们研究应当怎样规定这些热流(代数的)以使用最小的费用得到所希望的结果。可以假定费用正比于所要求热流的一个增函数的积分：

应满足的方程和条件是：

$$\partial u/\partial t-\Delta u=g \tag{2.27}$$

(g 是 x 和 t 的一个给定函数)

令

$$\bar{u}(t)\doteq(\mathrm{Mes}\Omega)^{-1}\int_{\Omega}u(x,t)\,dx \tag{2.28}$$

要求

$$\bar{u}(t)\in[\theta_1(t),\theta_2(t)] \tag{2.29}$$

求 Γ 上的函数 $\varphi(x,t)$，使得当

$$-\partial u/\partial n=\varphi\quad(\forall t,\text{p.p. 于 }\Gamma),\forall t \tag{2.30}$$

时(2.29)成立，并使在每一时刻形为

$$I(t,\varphi(t))=\int_{\Gamma}F(t,\varphi(x,t))d\Gamma \tag{2.31}$$

的给定泛函取最小值，这里 $\lambda\to F(t,\lambda)(\lambda\in\mathrm{R})$ 是一个给定的函数。函数 F 的可能选择是

i)　$F(t,\lambda)=|\lambda|$

ii)　$F(t,\lambda)=\lambda^2$

iii)　$F(t,\lambda)=\lambda^+$

iv)　$F(t,\lambda)=\lambda^-$，等等。□

3. 温度控制和半渗透壁问题的变分提法

我们现在要把第 2 节中的问题表述为“变分不等方程”的形式．为使问题的提法更确切，所需要的泛函分析工具将在第 4 节给出，问题的求解在第 5 及其后各节讨论．

3.1 记号

设 u 和 v 是两个定义在 Ω 内的实函数，只要下列各式有意义[1]，我们令

(3.1)
$$a(u,v)=\int_\Omega u_{,i}v_{,i}\,dx$$

(3.2)
$$(u,v)=\int_\Omega uv\,dx$$

对定义在 Γ 上的函数 φ,ϕ 有

(3.3)
$$(\varphi,\phi)=\int_\Gamma \varphi\phi d\Gamma$$

对于 $x\in\Omega$ 和 $t\in]0,T[$ 的函数，引进

(3.4)
$$Q=\Omega\times]0,T[,\quad \Sigma=\Gamma\times]0,T[$$

设 u 是一个定义在 Q 内的(实值)函数，令

(3.5)
$$\begin{cases} u(t)=u(\cdot,t)=\text{函数 } x\to u(x,t)\\ u'(t)=\partial u(t)/\partial t=\text{函数 } x\to \partial u(x,t)/\partial t \text{ 等}. \end{cases}$$ □

函数 ϕ．我们将使用函数 $\lambda\to\phi(\lambda)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，它有下列性质

(3.6) $\lambda\to\phi(\lambda)$ 是凸的下半连续的函数 (s.c.i)，取值在 $]-\infty,+\infty]$[2]且不恒等于 $+\infty$．

我们区别具有性质(3.6)的函数的三种类型：

(3.7) 1 型函数 $\phi:\lambda\to\phi(x)$ 是一次连续可微的

例 3.1 (图 6)

---

1) 在第 4 节明确其条件．

2) 因而 ϕ 可以取值“$+\infty$”．

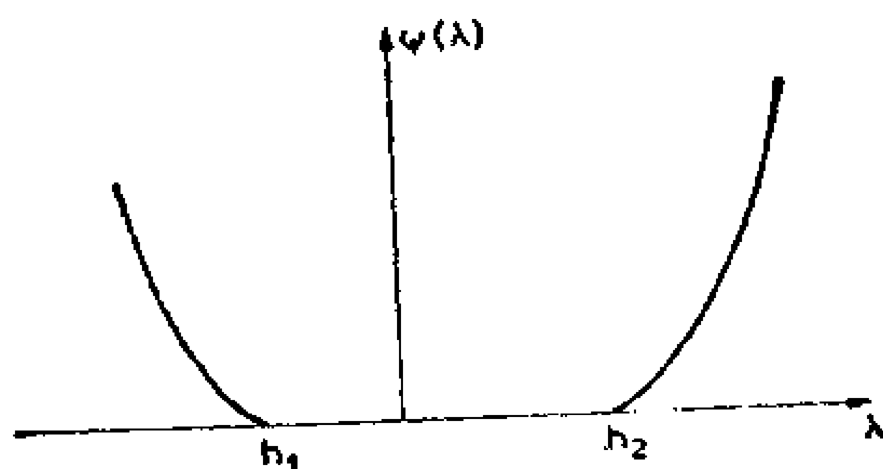


图 6

$$\psi(\lambda)=\begin{cases} a_1(\lambda-h_1)^2, & \lambda\leqslant h_1,\\ 0, & h_1\leqslant\lambda\leqslant h_2\\ a_2(\lambda-h_2)^2, & \lambda\geqslant h_2\\ 0<a_1<a_2 \end{cases}$$

(3.8)　2 型函数 $\psi:\lambda\to\psi(\lambda)$ 不是连续可微的，但处处取有限值.

例 3.2（图 7）

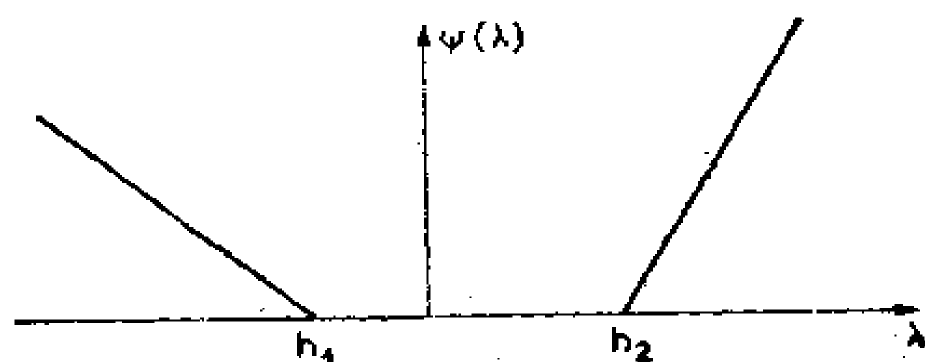


图 7

$$\psi(\lambda)=\begin{cases} g_1(\lambda-h_1), & \lambda\leqslant h_1\\ 0, & h_1\leqslant\lambda\leqslant h_2\\ g_2(\lambda-h_2), & \lambda\geqslant h_2\\ g_1<0<g_2 \end{cases}$$ □

(3.9)　3 型函数 $\psi:\lambda\to\psi(\lambda)$ 取值 $+\infty$

例 3.3（图 8）

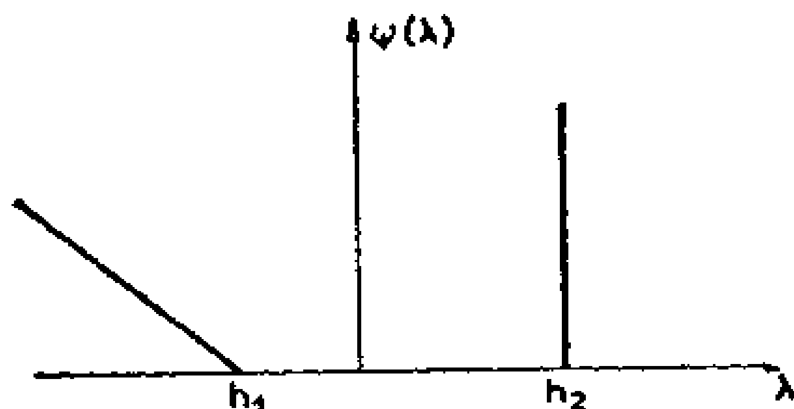


图 8

$$\phi(\lambda)=\begin{cases} g_1(\lambda-h_1), & \lambda\leqslant h_1\\ 0, & h_1\leqslant\lambda\leqslant h_2\\ +\infty, & \lambda>h_2\\ g_1<0<g_2 & \end{cases}$$ □

对函数 ϕ 联系一个泛函 Ψ。令

$$\Psi(v)=\int_\Gamma \phi(v(x))d\Gamma \tag{3.10}$$

或

$$\Psi(v)=\int_\Omega \phi(v(x))\,dx \tag{3.11}$$

只要表达式有意义[1]。

注 3.1 注意，在 ϕ 是 3 型的情况下，Ψ 不是"处处"定义的；如在例 3.3 中，泛函(3.10)仅当 $v(x)\leqslant h_2$(p.p) 时有定义. □

注 3.2 同样可以考虑(适当地)依赖于 $x\in\Gamma$ 或 $x\in\Omega$ 的一族函数 ϕ: "$\lambda\to\phi(x;\lambda)$"；这时引入

$$\Psi(v)=\int_\Gamma \phi(x;v(x))d\Gamma \tag{3.12}$$

或

$$\Psi(v)=\int_\Omega \phi(x;v(x))\,dx \tag{3.13}$$ □

---

1) 在第 4 节和第 5 节将确切说明.

3.2 变分不等方程

我们首先考虑发展和稳定变分不等方程问题，尔后我们指出这些问题"等价于"第 2 节中所遇到的问题.

发展变分不等方程[1)]

求一个函数 $t \to u(t) = u(\cdot, t)$，它满足

(3.14) $$\begin{cases} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \psi(v) \\ \qquad - \psi(u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t)) \\ \forall v, \ \psi \text{ 由(3.10)给定} \end{cases}$$

其中 $t \to f(t) = f(\cdot, t)$ 是已知函数，u 还满足

(3.15) $u(0) = u_0$，u_0 已知(即 $u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega$)

注 3.3 若 ψ 由(3.11)给定，对 $u(t)$ 和 v 要附加边条件，例如

(3.16) $$u(t) = 0 \text{ 且 } v = 0, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } \square$$

稳定变分不等方程("椭圆型的").

只需在(3.14)中取消对 t 的依赖性. 因而要找在 Ω 上定义的一函数 u，满足

(3.17) $$\begin{cases} a(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geqslant (f, v - u), \ \forall v \\ \psi \text{ 由(3.10)给定} \end{cases}$$

若 ψ 由(3.11)给定，则(与注 3.3 一样)尚需对 u 和 v 附加边条件.

3.3 例. 和第 2 节中问题的等价性

3.3.1 1 型函数 ϕ (ψ 由(3.10)给定)

引进函数

(3.18) $$\Phi(\lambda) = d\phi(\lambda)/d\lambda.$$

由 ϕ 的凸性，有

(3.19) $$\phi(\mu) - \phi(\lambda) - \Phi(\lambda)(\mu - \lambda) \geqslant 0, \ \forall \mu$$

我们将证明，在这些条件下，(3.14)等价于(变分)方程

(3.20) $$(u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_\Gamma \Phi(u(t)) v d\Gamma$$

---

1) 这里涉及抛物型变分不等方程，我们在下章将遇到"双曲型"的类似问题.

$$= (f(t), v), \quad \forall v$$

事实上,首先在(3.14)中令,

$$v = u(t) + \lambda w, \quad w\text{“任意”}, \lambda > 0$$

在除以 λ 之后,我们有

$$(u'(t), w) + a(u(t), w) + \lambda^{-1}[\psi(u(t) + \lambda w) - \psi(u(t))] \geqslant (f(t), w)$$

令 λ 趋于零,则有

$$(u'(t), w) + a(u(t), w) + \int_\Gamma \Phi(u(t)) w d\Gamma \geqslant (f(t), w)$$

把 w 换为 $-w$,我们得到等式,因此有(3.20).

反之,设(3.20)成立,那么

$$(3.21)\quad (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \psi(v) - \psi(u(t)) = (f(t), v - u(t)) + \psi(v) - \psi(u(t)) - \int_\Gamma \Phi(u(t))(v - u(t)) d\Gamma$$

但由(3.19)有

$$(3.22)\quad \psi(v) - \psi(u(t)) - \int_\Gamma \Phi(u(t))(v - u(t)) d\Gamma \geqslant 0$$

从而由(3.21)可推出(3.14). □

注 3.4 若 Ψ 由(3.11)给定,则(3.14)等价于

$$(3.23)\quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_\Omega \Phi(u(t)) v dt = (f(t), v)$$

另外还要附加一个边条件,如(3.16). □

剩下的是解释(3.20),这是一个分部积分的练习。在(3.20)中令

(3.24) $v = \varphi =$ 在 Ω 内有紧支集的正则函数

那么(3.20)化为

$$(u'(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = (f(t), \varphi)$$

或

$$\int_\Omega (\partial u/\partial t - \Delta u)\varphi\, dx = \int_\Omega f(x, t)\varphi(x) dx$$

因而在 Ω 上的广义函数的意下[1)]

(3.25) $$\partial u/\partial t - \Delta u = f, \quad 在\ Q = \Omega \times]0,T[\ 中$$

设 v 是"任意"函数；(3.25) 两端乘以 $v = v(x)$，在 Ω 上分部积分；用 $\partial/\partial n$ 记在 Γ 上的外法向导数，那么

(3.26) $$(u'(t),v) - \int_\Gamma \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\Gamma + a(u(t),v) = (f(t),v)$$

与(3.20)比较即得

(3.27) $$\int_\Gamma (\partial u(t)/\partial n + \Phi(u(t))v d\Gamma = 0, \ \forall v.$$

即

(3.28) $$\partial u(t)/\partial n + \Phi(u(t)) = 0, \quad \Gamma\ 上$$

概言之，

(3.29)对于 1 型函数 ϕ(φ 由(3.10)给定)，问题(3.14)，(3.15)等价于[2)]求函数 $u = u(x,t)$，它是 (3.25) 的解，满足边条件(3.28)($\Phi = d\phi/d\lambda$) 和初条件 (3.15)。 □

注 3.5 在 (3.11)，(3.16) 的情况下，问题等价于求

(3.30) $$\partial u/\partial t - \Delta u + \Phi(u) = f, \quad Q\ 内$$

(3.31) $$u = 0, \quad \Sigma\ 上$$

且满足初条件(3.15)的解。 □

注 3.6 除非 $\Phi(\lambda) = k\lambda, k > 0$，问题是非线性的。 □

例 3.4 设 Φ 由(2.18)给定；定义 ϕ 如下

(3.32) $$\phi(\lambda) = \int_0^\lambda \Phi(\mu) d\mu \quad (如图\ 9\ 所示)$$

即

(3.33) $$\phi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - g_1^2/2k_1, & \lambda \leqslant h_1 + g_1/k_1 \\ \frac{1}{2} k_1(\lambda - h_1)^2, & h_1 + g_1/k_1 \leqslant \lambda \leqslant h_1 \\ 0, & h_1 \leqslant \lambda \leqslant h_2 \\ \frac{1}{2} k_2(\lambda - h_2)^2, & h_2 \leqslant \lambda \leqslant h_2 + g_2/k_2 \\ g_2(\lambda - h_2) - \frac{g_2^2}{2k_2}, & \lambda \geqslant h_2 + g_2/k_2 \end{cases}$$

1) L. Schwartz[1],[2].

2) (3.28)，(3.25) 可直接推出(3.14)，(3.15)。

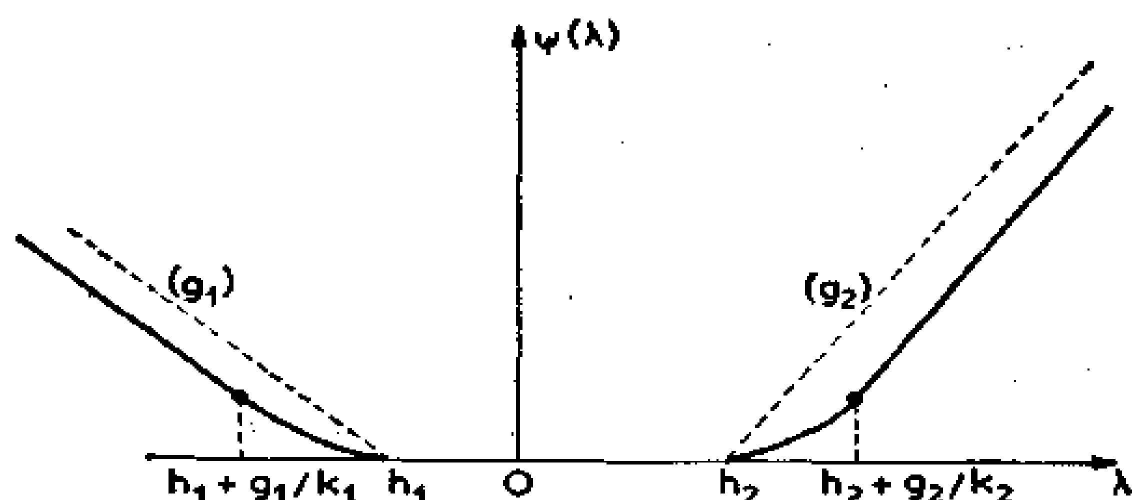


图 9

这样的ψ满足(3.6)且是1型的. 因此,我们可以应用(3.29)并得到问题(3.14),(3.15)等价于2.3.1的边界温度控制问题.

注 3.7 在(3.11),(3.16)的情形下,问题等价于2.3.2的内部温度控制问题. □

例 3.5 设ψ给定如下(图 10)

$$(3.34)\qquad \psi(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{2}k(\lambda-h)^2, & \lambda\leqslant h\\ 0, & \lambda\geqslant h\end{cases}$$

函数ψ满足(3.6),是1型的;显然有

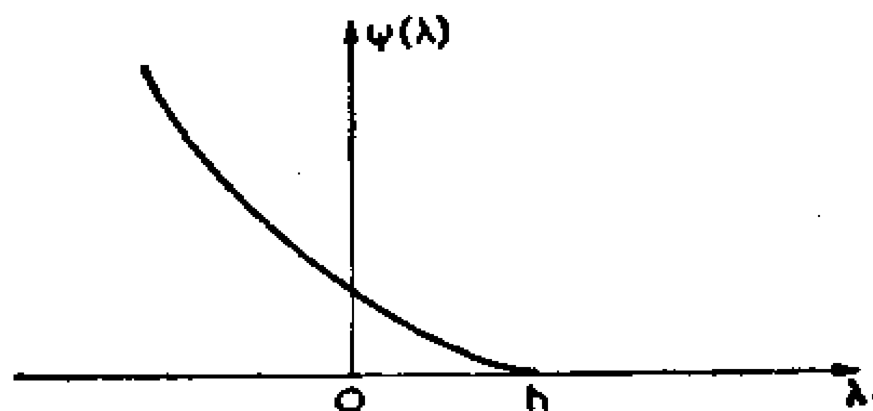


图 10

(3.35) $$\Phi(\lambda)=\begin{cases}k(\lambda-h), & \lambda\leqslant h\\ 0, & \lambda\geqslant h\end{cases}$$

若取 Ψ 为 (3.10)，则得 (3.28)，即

(3.36) $$\begin{cases}\partial u(t)/\partial n=0, & 若\ u(t)>h\\ \partial u(t)/\partial n+k(u(t)-h)=0, & 若\ u(t)\leqslant h\end{cases}$$

这是厚半渗透壁问题；见 2.2.2. □

3.3.2 2 型函数 ϕ.

仍以 $\Phi(\lambda)$ 记 $\phi(\lambda)$ 的"导数"，但这个"导数"可能是多值的。一般以"下微分"称呼这个多值函数，在使 ϕ 不可微的那些点 λ，以 $\Phi(\lambda)$ 记 ϕ 在 λ 的余切，即

(3.37) $$\Phi(\lambda)=\mu\to\lambda\ 时\ \frac{\phi(\mu)-\phi(\lambda)}{\mu-\lambda}\ 的极限点的集合$$

我们有(和(3.19)比较)

(3.38) $$\chi\in\Phi(\lambda)\Longleftrightarrow\phi(\mu)-\phi(\lambda)-\chi(\mu-\lambda)\geqslant 0,\ \forall\mu$$

导出(3.28)的推理仍有效，只要把 $\Phi(u(x,t))$ 用集合代替(若 $u(x,t)$ 是 ϕ 的不可微点)；相应的叙述应为

(3.39) $$-\partial u(t)/\partial n\in\Phi(u(t))$$

(自然在 ϕ 的可微点，(3.39)等价于(3.28))。因此：

(3.40) | 对于 2 型函数 ϕ(ψ 由 (3.10) 给定)，问题(3.14)，(3.15)等价于求 (3.25) 的解 $u=u(x,t)$，它满足"边条件"(3.39)($\Phi=\phi$ 的下微分或余切)和初条件(3.15)。□

注 3.8 在情形(3.11)，(3.16)，问题等价于求

(3.41) $$-(\partial u(x,t)/\partial t-\Delta u(x,t)-f(x,t))\in\Phi\ (u(x,t))$$ 的解，它满足(3.31)和(3.15)。□

例 3.6 取例 3.2 给定的函数 ϕ(图 7)。那么

(3.42) $$\Phi(\lambda)=\begin{cases}g_1, & \lambda<h_1\\ [g_1,0], & \lambda=h_1\\ 0, & h_1<\lambda<h_2\\ [0,g_2], & \lambda=h_2\\ g_2, & \lambda>h_2\end{cases}$$

边条件(3.39)于是写成：在 Σ 上有

(3.43)
$$\begin{cases} -\partial u(t)/\partial n = g_1, & u < h_1 \\ g_1 \leqslant -\partial u(t)/\partial n \leqslant 0, & u = h_1 \\ \partial u(t)/\partial n = 0, & h_1 < u < h_2 \\ 0 \leqslant -\partial u(t)/\partial n \leqslant g_2, & u = h_2 \\ -\partial u(t)/\partial n = g_2, & u > h_2 \end{cases}$$ □

3.3.3 3 型函数 ϕ

我们已经指出（注 3.1），当 ϕ 是 3 型时，Ψ 不是处处定义的——甚至取 $+\infty$ 值.

这时给出下列定义[1]：

(3.44) K 表示使 $\Psi(v) \neq +\infty$ 的 v 的集合.

以后将看到，K 在一适当的泛函空间中是一闭凸集，那么(3.14)等价于

(3.45)
$$(u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t)), \forall v \in K$$

(3.46)
$$u(t) \in K$$

设 w 是 K 的任一元素；在(3.45)中取

$$v = u(t) + \theta(w - u(t)), \ 0 < \theta < 1$$

则有

$$(u'(t), w - u(t)) + a(u(t), w - u(t)) + \theta^{-1}(\Psi(u(t) + \theta(w - u(t))) - \Psi(u(t))) \geqslant (f(t), w - u(t))$$

令 $\theta \to 0$（并重新把 w 记作 v）得

(3.47)
$$(u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + (\chi, v - u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t)), \ \forall v \in K$$

由此

(3.48)
$$\chi \in \Phi(u(t))$$

即当 Ψ 在"点" $u(t)$ 可微时

$$\chi = \Phi(u(t))$$

---

1) 多少还是形式的．选定 v 的泛函类之后，才能精确化．

当Ψ在"点"$u(t)$不可微时，$\chi\in\psi$在$u(t)$的下微分，亦可说χ是满足

$$(3.49)\qquad \varphi(v)-\varphi(u(t))-(\chi,v-u(t))\geqslant 0,\ \forall v\in K$$

的元素的集合.

反之,若u满足(3.46),(3.47)和(3.48),则有(3.45)((3.49)的直接推论)。

因此

(3.50) | 对于3型函数ϕ，问题等价于求 $u(t)\in K$(K由(3.44)定义)，它满足(3.47),(3.48)和初条件(3.15)。 ▯

当Ψ由(3.10)给定,还可进一步论证. 注意若φ象在(3.24)中那样给定,则

$$(3.51)\qquad v=u(t)\pm\varphi\in K$$

于是在(3.45)中可取(3.51),这给出

$$(u'(t),\varphi)+a(u(t),\varphi)=(f(t),\varphi)$$

由此又得方程(3.25).

再利用(3.26)(以$v-u(t)$代v)并和(3.45)比较即推出

$$(3.52)\qquad \left|\begin{array}{l}\int_\Gamma(\partial u(t)/\partial n+\chi)(v-u(t))d\Gamma\geqslant 0\\ \forall v\in K,\ \chi\in\Phi(u(t))\end{array}\right.$$

概言之:

(3.53) | 对于3型函数ϕ和由(3.10)给定的Ψ,问题等价于求(3.25)的解u,满足 $u(t)\in K,\ \forall t$ 条件(3.52)和初条件(3.15). ▯

例 3.7 首先取ϕ如下(图 11):

$$(3.54)\qquad \phi(\lambda)=\left|\begin{array}{ll}0, & [h_1,h_2]\text{ 上}\\ +\infty, & \text{其它}\end{array}\right.$$

那么

$$(3.55)\qquad K=\{v\,|\,h_1\leqslant v\leqslant h_2\quad \text{在 }\Gamma\text{ 上}\}$$

而"边条件"是,在Σ上,

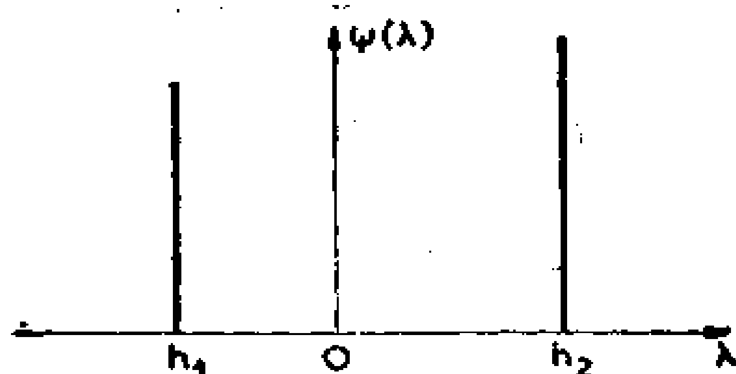


图 11

$$
(3.56)\qquad \begin{cases} h_1 \leqslant u(x,t) \leqslant h_2 \\ \int_\Gamma \frac{\partial u(t)}{\partial n}(v-u(t))d\Gamma \geqslant 0, \quad \forall v \in K \end{cases}
$$

(因 $\Phi(u(t)) = 0$ (或 $\{0\}$)), 或[1]

$$
(3.57)\qquad \begin{cases} u = h_1 \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \geqslant 0 \\ h_1 < u < h_2 \Rightarrow \partial u(t)/\partial n = 0 \\ u = h_2 \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \leqslant 0 \end{cases}
$$

特殊情形. 取[2]

$$
(3.58)\qquad h_1 = h, \quad h_2 = +\infty \text{ (这是允许的)}
$$

这就是半渗透薄壁问题(见 2.2.1). □

例 3.8 取例 3.3 中的 ϕ, 我们有

$$
(3.59)\qquad K = \{v \mid v \leqslant h_2 \quad \text{于 } \Gamma \text{ 上}\}
$$

和

$$
(3.60)\qquad \begin{cases} (\partial u(t)/\partial n + \chi)(v-u(t)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K \\ \chi \in \Phi(u(t)) \end{cases}
$$

由此

$$
| u(t) = h_2 \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \leqslant 0
$$

---

1) 注意(3.56)中的不等式等价于逐点不等式

$$
\frac{\partial u(t)}{\partial n}(v-u(t)) \geqslant 0 \quad \Gamma \text{ 上}.
$$

2) 事实上, $h_1 = h(x)$; 见注 3.2.

$$
(3.61)\quad \begin{cases} h_1 < u(t) < h_2 \Rightarrow \partial u(t)/\partial n = 0 \\ u(t) = h_1 \quad \Rightarrow \partial u(t)/\partial n + \chi = 0, \ \chi \in [g_1, 0] \\ u(t) < h_1 \quad \Rightarrow \partial u(t)/\partial n + g_1 = 0 \quad \square \end{cases}
$$

3.4 若干补充

若 $a(u,v)$ 满足(代替 (3.1)),

$$
(3.62)\qquad a(u,v) = \int_{\Omega} a_{ij} v_{,i}(x) v_{,j}(x) dx
$$

其中

$$
(3.63)\quad \begin{cases} a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega) \quad (\Omega \text{ 上的有界可测函数}) \\ a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\xi_i\xi_i, \ \alpha > 0, \ x \in \Omega, \ \forall \xi \in R^n \end{cases}
$$

则可考虑并用后面介绍的方法来解与前面类似的问题. 其解释是类似的,只需做下述修改: 算子 $-\Delta$ 代之以满足

$$
(3.64)\qquad Av = -(a_{ij}(x)\ v_{,j})_{,i}
$$

的算子 A. 而法向导数 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ (指向 Ω 的外部)代之以 $\partial/\partial v_A$, 它由下式给定

$$
(3.65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial v_A} = a_{ij} \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \\ \cos(n, x_i) = \Gamma \text{ 上的指向 } \Omega \text{ 外部} \\ \text{的法线的方向余弦} \quad \square \end{cases}
$$

注 3.9 还可以取

i) 依赖时间的形式 $a(t; u, v)$ (即在 (3.62) 中函数 a_{ij} 依赖 x 和 t);

ii) 一些对 u 非线性的形式.

以进一步推广情形 (3.62), 但我们不在这儿进行.

3.5 稳定情形

利用前面 3.3 中引进的记号,直接可得(3.17)的解释. 我们有下列结果.

3.5.1 1 型函数 Ψ

若Ψ由(3.10)给定,(3.17)等价于求

$$-\Delta u = f, \quad \Omega \text{ 内} \tag{3.66}$$

的解 u, 满足边条件

$$\partial u/\partial n + \Phi(u) = 0, \quad \Gamma \text{ 上} \tag{3.67}$$

若Ψ由 (3.11) 给定,又给了 (3.16), 则有

$$\begin{cases} -\Delta u + \Phi(u) = f, & \Omega \text{ 内} \\ u = 0, & \Gamma \text{ 上} \end{cases} \tag{3.68}$$

□

3.5.2 2型函数Ψ

若Ψ由(3.10)给定,则(3.17)等价于(3.66),附加边条件

$$-\partial u/\partial n \in \Phi(u) \tag{3.69}$$

在Ψ由(3.11)给定并附加(3.16)时,我们有

$$-(-\Delta u - f) \in \Phi(u), \quad u = 0, \quad \Gamma \text{ 上} \tag{3.70}$$

□

3.5.3 3型函数Ψ

仍以(3.44)定义 K. 若Ψ由(3.10)给定,则(3.17)等价于求解 u, 满足

$$\begin{cases} u \in K \\ -\Delta u = f, \quad \Omega \text{ 内}, \\ \int_\Gamma (\partial u/\partial n + \chi)(v - u)d\Gamma \geqslant 0, \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.71}$$

这里 $\chi \in \Phi(u)$

若Ψ由(3.11)给定,(3.17)等价于求解 u, 满足

$$\begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) + (\chi, v-u) \geqslant (f, v-u), \\ \qquad \forall v \in K, \quad \chi \in \Phi(u) \end{cases} \tag{3.72}$$

3.5.4 稳定情形和变分问题

我们有下列结果: 若假设 $a(u,v) = a(v,u)$, $\forall u, v$[1], 则求(3.17) 的解 u 等价于求使泛函

1) 若 $a(u,v)$ 由(3.1)给定,则如是,或由(3.62)给定,当且仅当 $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j$. 注意,若没有 $a(u,v) = a(v,u)$, $\forall u,v$, 则结果不真.

(3.73) $$J(v)=\frac{1}{2}a(u,v)+\varphi(v)-(f,v)$$

取最小值的 u（如果它存在）。这里下确界是对满足

$$\varphi(v)<+\infty$$

的所有函数 v 取的。若 φ 由 (3.11) 给定，再附加条件，例如"$v=0$ Γ 上"。

这个结果是下述一般结果 (Lions [2]，第 1 章)的推论：设 K 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 里的一个闭凸集，J_1 和 J_2 是 $K\to\mathbf{R}$ 的两个凸连续函数，函数 J_1 是可微的，函数 J_2 可以不可微。则下列两条件是等价的：

(3.74) $$u\in K,\ J_1(u)+J_2(u)=\inf_{v\in K}[J_1(v)+J_2(v)]$$

(3.75) $$u\in K,\ (J_1'(u),v-u)+J_2(v)-J_2(u)\geqslant 0,\ \forall v\in K$$

在验证等价性之前，立即注意，这可推出所要结果，只需令

(3.76) $$\begin{cases} J_1(v)=\dfrac{1}{2}a(v,v)-(f,v),\ J_2(v)=\varphi(v) \\ K=\{v\mid\varphi(v)<\infty\}^{1)} \end{cases}$$

现证(3.74)和(3.75)的等价性。设 u 满足(3.74)；对 K 中的任意的 v 和 $\theta\in]0,1[$，有

$$\begin{aligned} J_1(u)+J_2(u)&\leqslant J_1(u+\theta(v-u))+J_2(u+\theta(v-u)) \\ &\leqslant J_1(u+\theta(v-u))+(1-\theta)J_2(u) \\ &\quad+\theta J_2(v) \end{aligned}$$

由此

$$\theta^{-1}[J_1(u+\theta(v-u))-J_1(u)]+J_2(v)-J_2(u)\geqslant 0$$

令 $\theta\to 0$ 即得 (3.75)。

反之，设 u 满足(3.75)，则

(3.77) $$\begin{aligned} J_1(v)+J_2(v)-J_1(u)-J_2(u) &=[(J_1'(u),v-u)+J_2(v)-J_2(u)] \\ &\quad+[J_1(v)-J_1(u)-(J_1'(u),v-u)]; \end{aligned}$$

1) 下面将明确定义 φ 的类。

由(3.75),(3.77)右端第一项 $\geqslant 0$，由 J_1 的凸性；第二项 $\geqslant 0$，由此即得 (3.74)。 □

4. 若干泛函分析工具

正如在第1节中不重述连续介质的完整理论一样，本节也不介绍 Sobolev 空间的一般理论。我们仅仅引进一些为理解本书内容而够用的基本知识，有关定理(例如后面的迹定理)的证明，请参见文献。

以后，我们还将在需要时复习 Sobolev 空间的更详细的结果。

4.1 Sobolev 空间

在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 上引进下列空间[1]：

1) $L^p(\Omega)$ — 满足下列条件的可测函数(类)的空间(p 是给定的数，$1 \leqslant p \leqslant \infty$)：

(4.1) $$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty \qquad (p \neq \infty)$$

(4.2) $$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |f(x)| < \infty$$

赋以范数(4.1)或(4.2)，$L^p(\Omega)$ 则为一 Banach 空间；若 $p=2$，$L^2(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间，和范数(4.1)(其中 $p=2$)相应的内积为

(4.3) $$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

2) $\mathscr{D}(\Omega)$ — C^∞ 在 Ω 内具有紧支集的函数空间；给定一个序列[2] φ_j，我们说在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 内 $\varphi_j \to 0$，如果

i) φ_j 的支集含在 Ω 的一个固定紧集 E 内。

ii) $\forall\alpha$，在 Ω 上一致地 $D^\alpha\varphi_j \to 0$，其中令

---

1) 所考虑的空间都是实值的。

2) 见 L. Schwartz[1]，$\mathscr{D}(\Omega)$ 的拓扑由0的一个基本邻域系定义。

(4.4) $$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi,\ \alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$$

3) $\mathscr{D}(\Omega)=\Omega$ 上的 C^∞ 函数空间,赋以范数族

$$\sup|D^\alpha\varphi(x)|$$

事实上这是一 Fréchet 空间。

4) $\mathscr{D}'(\Omega)=\Omega$ 上的广义函数的空间 $=\mathscr{D}(\Omega)$ 上的连续(即 $(f,\varphi_n)\to 0$,若在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\varphi_n\to 0$)线性型 $\varphi\to(f,\varphi)$ 的空间. 若 $(f_j,\varphi)\to(f,\varphi)$, $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则说在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $f_j\to f$.

广义函数的例子

i) 若 $a\in\Omega$, 则 $\varphi\to\varphi(a)$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上连续; 这是在点 a 上的 Dirac 质量, 记为

$$\varphi(a)=(\delta(a),\varphi)=\int_\Omega\delta(x-a)\varphi(x)dx$$

这里把广义函数写成通常的函数形式(今后总这样作).

ii) 若 $f\in L^p(\Omega)$, 则 $\varphi\to\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上是连续的,因而由

$$(\mathscr{F},\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

定义一广义函数 $\tilde{f}$. 映射 $f\to\tilde{f}$ 是单射的,即不同的 f 对应不同的 $\tilde{f}$, 因而可把 $\tilde{f}$ 与 f 等同看待. 于是有

(4.5) $$L^p(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$$

且从 $L^p(\Omega)$ 到 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的单射 $f\to\tilde{f}$ 是连续的[1]; 事实上, 若在 $L^p(\Omega)$ 内 $f_j\to 0$, 则在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 内 $f_j\to 0$.

对 $1<p\leqslant\infty$, $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的子空间 $L^p(\Omega)$ 可满足如下关系:

(4.6) $$f\in L^p(\Omega)\Longleftrightarrow\left|\begin{array}{l}f\in\mathscr{D}'(\Omega),\ \text{存在常数 } c \text{ 使}\\ |(f,\varphi)|\leqslant c\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)\end{array}\right.$$

其中 p' 是 p 的共轭指数,定义如下

1) 今后若 X 和 Y 表示两个拓扑向量空间, "$X\subset Y$" 意味着: 代数的包含关系连同相应的连续的单射。

(4.7)
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

蕴含关系"⇒"由对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 成立的不等式

$$|(f,\varphi)|\leqslant\|f\|_{L^p(\Omega)}\;\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

推出.

对蕴含关系"⇐"，注意，若 $p\neq1$，则 $p'\neq\infty$，而 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $L^{p'}(\Omega)$ 中稠密，由此在 $L^p(\Omega)$（它等同 $L^{p'}(\Omega)$ 的对偶空间）中存在 f_*，使 $(f,\varphi)=(f_*,\varphi)$，$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$；把 f_* 和 f 等同，即得结果。

(iii) 若 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，对 $\forall\alpha$ 定义 $D^\alpha f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 如下：

(4.8)
$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi),\quad|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

另外，从 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 到 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的线性映射 $f\to D^\alpha f$ 是连续的。

□

Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$

如下式定义的空间称为 $L^p(\Omega)$ 上 m 阶的 Sobolev 空间

(4.9)
$$W^{m,p}(\Omega)=\{v\,|\,v\in L^p(\Omega),D^\alpha v\in L^p(\Omega),|\alpha|\leqslant m\}$$

记之为 $W^{m,p}(\Omega)$。赋以范数

(4.10)
$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$$

它就是 Banach 空间. □

$p=2$ 的情形是基本的. 为了简便，记

(4.11)
$$W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$$

其上赋以内积

(4.12)
$$(u,v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha u,\;D^\alpha v)$$

则它成为 Hilbert 空间. □

第一个迹定理. 注意，除一维情形外，$H^1(\Omega)$ 中的函数 v 不必在 Ω 上连续，更不必说在 $\bar{\Omega}$ 上了；但仍可定义——这对于应用是绝对必需的——v 在 Ω 的边界 Γ 上的值[1]。

---

1) 更一般地，在 $\bar{\Omega}$ 内的一个 $n-1$ 维正则流形上.

我们将假设

(4.13) Ω 是一有界[1]开集，其边界是一 $(n-1)$ 维一次连续可微流形，Ω 局部地在 Γ 的一侧.

人们证明了(例如 Lions-Magenes [1]，第 1 章)

(4.14) $$\mathscr{C}^1(\bar{\Omega}) \text{ 在 } H^1(\Omega) \text{ 中稠密,}$$

这里 $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的一次连续可微函数空间.

对 $v \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$，令

(4.15) $\gamma_0 v = \gamma v =$ "v 在 Γ 上的迹" $= v$ 在 Γ 上的值.

又令

(4.16) $L^2(\Gamma) = \{f \mid f$ 在 Γ 上对于测度 $d\Gamma$ 可测且平方可积$\}$,

(4.17) $$(f,g)_\Gamma = \int_\Gamma fg\,d\Gamma$$

人们证明了(例如见上面引用的 Lions-Magenes 的著作):

定理 4.1 在假设 (4.13) 下，可用唯一方式定义 $v \in H^1(\Omega)$ 在 Γ 上的迹 $\gamma_0 v = \gamma v$，使得当 $v \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$，$\gamma v$ 和通常的定义(4.15)相同；$\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$，且映射 $v \to \gamma_0 v$ 从 $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ 是线性连续的.

注 4.1 映射 $v \to D^\alpha v$ 由 $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \to H^1(\Omega)$ 是线性连续的；于是可定义

(4.18) $$\left\{\gamma_0(D^\alpha v) \,\middle|\, |\alpha| \leqslant m-1\right\}, \text{ 只要 } v \in H^m(\Omega)$$

事实上，由于知道了 v 在 Γ 上的值，便可求出它在 Γ 上的切向导数，用阶数 $\leqslant m-1$ 的法向导数代替出现在(4.18)的集合中的导数更合适:

(4.19) $\gamma v = \{v, \partial v/\partial n, \cdots \partial^{m-1} v/\partial n^{m-1}\} \in (L^2(\Gamma))^m$,

当 $v \in H^m(\Omega)$ □

注 4.2 γ_0 的核在下面起重要的作用，令

(4.20) $H_0^1(\Omega) = \gamma_0$ 的核 $= \{v \mid v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0\}$

更一般地

---

1) 若 Ω 无界，其边界 Γ 有界，则下面的定理 4.1 仍有效；若 Γ 无界，$\gamma_0 v$ 可按定理 4.1 定义，它在 Γ 上是局部平方可积的.

(4.21)　$H_0^m(\Omega)=$ (4.19)定义的 γ 的核 $=\{v \mid v\in H^m(\Omega),$
$\gamma v=0\}$.

我们有

(4.22)　$H_0^m(\Omega)$ 是 $H^m(\Omega)$ 的一闭子空间.

从而 $H_0^m(\Omega)$ 对于由 $H^m(\Omega)$ 的结构导出的结构是 Hilbert 空间.

注 4.3　人们证明了(在前面引用的 Lions-Magenes 著作)

(4.23)　$\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中稠密.

于是 $H_0^m(\Omega)$ 上的所有连续线性型等同于 Ω 上的一广义函数. 用 $H^{-m}(\Omega)$ 表示在这个等同之下 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间;于是

(4.24)　$H_0^m(\Omega)\subset L^2(\Omega)\ (=H^0(\Omega))\subset H^{-m}(\Omega)$　□

注 4.4　定理 4.1 在下述意义下不是最佳可能的, 映射 $v\to\gamma_0 v$ 由 $H^1(\Omega)\to L^2(\Gamma)$ 不是满射的(即 $H^1(\Omega)$ 在 γ_0 下的象不是全空间 $L^2(\Gamma)$. ——译注),为了刻画 $H^1(\Omega)$ 在 γ_0 下的象空间,必须引进一些补充概念. □

空间 $H^s(\mathbf{R}^n)$, s 不必是整数. 在 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 的特殊情形, 可用 Fourier 变换定义 $H^m(\mathbf{R}^n)$. 若 v 是一具紧支集的连续函数, 则其 Fourier 变换定义为

(4.25)　$$\hat{v}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-2\pi i x\cdot\xi)v(x)dx$$

其中

$$\xi=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}, x\cdot\xi=x_i\xi_i$$

人们证明了 (Plancherel 定理) $\hat{v}\in L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$, 且

(4.26)　$$\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi^n)}=\|v\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

于是可由连续延拓对每一个 $v\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 定义 $\hat{v}$. 映射 $v\to\hat{v}$ 是可逆的;若 $\hat{v}=w$, 则 $v=v_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}_x^n)$ 中的极限 $(j\to+\infty)$, 其中

$$v_j(x)=\int_{|\xi|<j}\exp(2\pi i x\cdot\xi)\hat{v}(\xi)d\xi$$

此式还可写为

$$v(x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^n} \exp(2\pi i x \cdot \xi)\hat{v}(\xi)d\xi$$

由此可验证

(4.27) $$v \in H^m(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow (1 + |\xi|^2)^{m/2}\hat{v} \in L^2(\mathbf{R}_\xi^n)$$

于是自然定义

(4.28) $$H^s(\mathbf{R}^n) = \{v \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbf{R}_\xi^n)\}$$

它对于范数

(4.29) $$\|v\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi^n)}$$

是一 Hilbert 空间。当 $s = m$ 时这个范数等价于由(4.12)定义的范数。 ▯

注 4.5 定义(4.28)对 $s < 0$ 亦成立。当 $H^0(\mathbf{R}^n)$ 等同于其对偶时,我们有[1]

(4.30) $$H^s(\mathbf{R}^n) = (H^{-s}(\mathbf{R}^n))'$$

对 $s = -m$, $\Omega = \mathbf{R}^n$, 就又得到在注4.3中引入的空间。 ▯

注 4.6 空间 H^s 有下列"局部"性质:

(4.31) $$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n),\ \varphi v \in H^s(\mathbf{R}^n),\ \forall v \in H^s(\mathbf{R}^n) \text{ 且} \\ \text{映射 } v \to \varphi v \text{ 从 } H^s(\mathbf{R}^n) \to H^s(\mathbf{R}^n) \text{ 是线性连续的。} \end{cases}$$ ▯

有了性质(4.31),即可对 $\forall s$ 定义 $H^s(\Gamma)$。首先,对 $s \geq 0$ 定义 $H^s(\Gamma)$,再令

(4.32) $$H^\sigma(\Gamma) = (H^{-\sigma}(\Gamma))' \quad \text{当 } \sigma < 0 \text{ 时}$$

对函数 $v \in L^2(\Gamma)$,借助一族局部图和从属于它的一单位分解 $\{\theta_i\}$; 令

$$v = \sum \theta_i v \quad (\text{有限和})$$

再定义 $\theta_i v$ 在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 内的象(即 $\theta_i v$ 在局部图中给的同胚之下对应的定义在全空间 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上的函数);若所有的 $\theta_i v$ 的象都在 $H^s(\mathbf{R}^{n-1})$ 中,则说 $v \in H^s(\Gamma)$; 若 w_i 是 $\theta_i v$ 的象,则在 $H^s(\Gamma)$ 上取(Hilbert)范数:

---

1) 一般地,X' 表示 X 的对偶空间。

(4.33) $$\|v\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_i \|w_i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}$$

由 (4.31)，这样定义的空间 $H^s(\Gamma)$ 不依赖于局部图的族和单位分解的选择；范数 (4.33) 依赖于这种选择，但所得的不同范数是等价的. 因此，空间 $H^s(\Gamma)$ 及其拓扑的定义是内在的，但其范数则不然. □

第二个迹定理.

现在可以下列定理补充定理 4.1.

定理 4.2 在定理 4.1 的假设之下，映射 $v \to \gamma_0 v$ 从 $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ 是线性连续的和满射的.

证明参见，例如 Lions-Magenes [1]. □

4.2 应用：凸集 K

仍采用第 3 节的记号.

首先注意，由 (3.1) 或 (3.62) 定义的双线性型 $a(u,v)$ 在 $H^1(\Omega)$ 上是连续的，我们已验证了这一事实. 另外，条件 (3.16) 可写为

$$u(t) \in H_0^1(\Omega), \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

为了明确稳定不等方程 (见 3.5) 的意义，只剩下对 $v \in H^1(\Omega)$ 定义 $\Psi(v)$.

首先考虑 Ψ 由 (3.10)(形式地) 定义的情况. 按照定理 4.1，注意 $v(x)$ 在 Γ 上是几乎处处有定义的，从而 $\phi(v(x))$ 亦如此. 于是设

(4.34) $$E = \{\lambda \mid \phi(\lambda)\text{有限}\}$$

集合 E 是闭凸集(有界或无界).

于是令

(4.35) $$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v(x) \in E \quad \text{p.p.}\, x \in \Gamma\}$$

由定理 4.1，我们有

(4.36) 集合 K 是 $H^1(\Omega)$ 中的闭凸集.

作假设(并非必须，见下面的注 4.7)：

$$(4.37)\quad \left|\begin{array}{l}\text{函数 } \phi \text{ 至多在 } E \text{ 上在无穷远是平方增长的} \\ \text{(当 } E \text{ 有界时,这失去意义),即 } \phi(\lambda) \leqslant c_1\lambda^2 + \\ c_2,\ c_i \text{ 为适当的常数}, \lambda \in E.\end{array}\right.$$

于是对 $v \in K$,有 $\phi(v(x)) \in L^1(\Gamma)$,可令

$$(4.38)\qquad \Psi(v) = \int_\Gamma \phi(v(x))d\Gamma \quad \square$$

注 4.7 若 (4.37) 不成立,只需以 (4.35) 和条件"$\phi(v) \in L^1(\Gamma)$"定义 K. 情形 (4.37) 的限制是为了简化叙述并且对应用已足够. $\square$

函数 $v \to \Psi(v)$ 从 $K \to \mathbf{R}$ 连续;事实上,由 Krasnosel'skii[1](定理 2.1, 22 页)映射 $v \to \phi(v)$ 从 $L^2(\Gamma) \to L^1(\Gamma)$ 连续. 另外,由 ϕ 的凸性,函数 $v \to \Psi(v)$ 是凸的. $\square$

在 Ψ 由 (3.11) (形式地)定义的情形下,引入

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v(x) \in E, \text{p.p. 于 } \Omega\}$$

在假设(4.37)之下,有和前面同样的性质. $\square$

4.3 向量值函数空间

为了确切表达第 3 节提出的发展问题,我们需要进一步的工具,现在就来引进它们.

设 X 是一个 Banach 空间,其范数记为 $\| \ \|_X$;用 $L^p(0,T;X)$ 表示从$[0,T]$到 X(对于测度 dt)可测的函数(类)$t \to f(t)$的空间,满足

$$(4.39)\qquad \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty \quad (p \neq \infty)$$

$$(4.40)\qquad \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess}\|f(t)\|_X$$

这是一个 Banach 空间.

用 $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$ 记 $]0,T[$ 上在 X 中取值的广义函数的空间,其定义是

$$(4.41)\qquad \mathscr{D}'(]0,T[;X) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(]0,T[);X)$$

其中按一般的方式 $\mathscr{L}(Y;X)$ 表示从 Y 到 X 的连续线性映射的空

间。

一个函数 $f\in L^p(0,T;X)$ 对应一个 $]0,T[$ 上在 X 中取值的广义函数 $\tilde{f}$，满足

(4.42) $$\tilde{f}(\varphi)=\int_0^T f(t)\varphi(t)dt,\ \varphi\in\mathscr{D}(]0,T[)$$

(这明确地定义了一个从 $\mathscr{D}(]0,T[)$ 到 X 的连续线性映射 $\varphi\to\tilde{f}(\varphi)$)。映射 $f\to\tilde{f}$ 是单射；因而可把 $\tilde{f}$ 和 f 等同。另外，若在 $L^p(0,T;X)$ 中 $f\to 0$，则在 $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$ 中 $\tilde{f}\to 0$，即对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(]0,T[)$，$\tilde{f}(\varphi)\to 0$，(于是我们有

(4.43) $$L^p(0,T;X)\subset\mathscr{D}'(]0,T[;X)\quad\square$$

对 $f\in\mathscr{D}'(]0,T[;X)$，定义 $d^kf/dt^k=f^{(k)}$ 如下：

(4.44) $$f^{(k)}(\varphi)=(-1)^kf(\varphi^{(k)}),\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(]0,T[)$$

这就定义了 $f^{(k)}\in\mathscr{D}'(]0,T[;X)$。此外，映射 $f\to f^{(k)}$ 从 $\mathscr{D}(]0,T[;X)$ 到其自身是连续线性的。$\square$

以后经常遇到下列情况：设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，满足

(4.45) $$X\subset Y$$

设给定 v 满足

(4.46) $$v\in L^p(0,T;X)$$

于是其导数 dv/dt 定义为 $\mathscr{D}'(]0,T[;X)$ 中的一个元素，特别(由于 $\mathscr{D}'(]0,T[;X)\subset\mathscr{D}'(]0,T[;Y)$)：

(4.47) $$dv/dt\in\mathscr{D}'(]0,T[;Y)$$

现假设

(4.48) $$dv/dt\in L^q(0,T;Y)\ (1\leqslant q\leqslant\infty)$$

于是，要在一个零测集上的值进行可能的修正之后，v 从 $[0,T]$ 到 Y 连续。$\square$

这个结果不是最佳的[1]；我们将对一种特殊的空间对子 $\{X,Y\}$ 精确之——这种对子本书以后经常使用。

---

1) 见 J. L. Lions 和 J. Peetre [1].

设 V 和 H 是 $\mathbb{R}$ 上的两个 Hilbert 空间，其范数分别是 $\|\ \|$，$|\ |$，H 上的内积记为 $(,)$；假设

(4.49) $$V \subset H^{1)},\ V \text{ 在 } H \text{ 中稠密}$$

H 等同于其对偶空间，于是 H 等同于 V 的对偶空间 V' 的一子空间，由此

(4.50) $$V \subset H \subset V'$$

例 4.1

$$V = H_0^m(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ V' = H^{-m}(\Omega)$$

例 4.2

$$V = H^m(\Omega),\ H = L^2(\Omega)$$

V' 不是 Ω 上的广义函数空间（因为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中不稠密）．□

设 v 给定，且满足

(4.51) $$v \in L^2(0,T;V),\ dv/dt \in L^2(0,T;V')$$

我们有（例如见 Lions-Magenes[1]，第 1 章）

(4.52) 在对 v 在一个零测集上的值作可能的修正后，函数 $t \to v(t)$ 从 $[0,T]$ 到 H 连续．□

5. 第 3 节中发展变分不等方程的求解

5.1 问题的最终提法

为使理论的介绍更清楚，我们要推广第 3 节中问题的提法．

5.1.1 V, H, V' 和 $a(u,v)$ 的给定

给定三个如(4.49)、(4.50)的 Hilbert 空间和一个定义在 V 上连续的、强制的双线性型 $u,v \to a(u,v)$，强制的意义是

(5.1) $$\left|\begin{array}{l}\text{存在 } c \text{ 和 } \alpha > 0 \text{ 使}^{2)} \\ a(v,v) + c|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2,\ \forall v \in V\end{array}\right.$$

例 5.1 $V = H^1(\Omega)$，a 由 (3.1) 给定．则 (5.1) 成立，例如

1) 于是存在一个常数 c，使 $|v| \leqslant c\|v\|$，$\forall v \in V$．

2) 注意，$|v|$（相应地 $\|v\|$）表示 v 在 $H(V)$ 中的范数．

$c = 1$, $\alpha = 1$. □

例 5.2 $V = H_0^1(\Omega)$, a 由 (3.1) 给定. 则 (5.1) 成立, 其中 $c = 0$. □

5.1.2 泛函 Ψ

给定一 $V \to \mathbf{R}$ 的函数 $v \to \Psi(v)$, 满足

(5.2) 函数 $v \to \Psi(v)$ 是凸的, 对于 V 的弱拓是 s.c.i 的, 在 $]-\infty, +\infty]$ 取值;

存在 V 上的一族可微函数 Ψ_j; 满足

(5.3) $\forall v \in L^2(0,T;V)$ 有 $\int_0^T \Psi_j(v(t))dt \to \int_0^T \Psi(v(t))dt$, $j \to \infty$

(5.4) 存在 V 内的有界序列 φ_j, 满足 $\Psi_j'(\varphi_j) = 0$, $\forall j$

(5.5) 若 $v_j \to v$, $v_j' \to v'$, 在 $L^2(0,T;V)$ 中是弱的且 $\int_0^T \Psi_j(v_j)dt \leqslant$ 常数, 则 $\liminf \int_0^T \Psi_j(v_j)dt \geqslant \int_0^T \Psi(v)dt$ □

注 5.1 (5.3)—(5.5) 不是必须的. 见 H. Brézis[1], [2]. 但这对我们的目的来说是充分的(见后面的 5.3).

5.1.3 问题的提法

利用引进的记号, 可以看到所遇到的所有发展问题都可纳入下述结构[1]: 求函数 u, 使得

(5.6) $$u \in L^2(0,T;V),\quad u' \in L^2(0,T;V')$$

(5.7) 对几乎所有的 t 和 $v \in V$, 有
$$(u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t)),\quad \forall v \in V$$

(5.8) $$u(0) = u_0$$

u_0 在 V 中给定(满足 $\Psi(u_0) < \infty$), f 在 $L^2(0,T;V')$ 中给定.

---

1) 尚需验证 (5.2)—(5.5). 这将在 5.3 进行.

5.2 主要结果的陈述

下面我们将得到"强"解(尤其是改进了(5.6)). (这里我们不介绍"弱"解理论,可参考 Brézis [1],[2] 和 Lions [1].) 为此,对已知的 f 和 u_0 要作很强的假设:

(5.9) $$f, f' \in L^2(0,T;V')$$

(5.10) 存在 $u_{0,j} \in V$, 满足在 V 中 $u_{0j} \to u_0$, 对每一个 u_{0j} 存在 $k_j \in H$, 满足
$a(u_{0j}, v) + (\Psi_j'(u_{0j}), v) = (k_j, v)$, $\forall v \in V$ 且
$|k_j| \leqslant$ 常数,当 $j \to \infty$ 时

定理 5.1 假设条件(5.1)--(5.5)和(5.9),(5.10)成立,则存在唯一的函数 u 满足

(5.11) $u \in L^2(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$[1)]

和(5.7),(5.8).

定理 5.2 (逼近定理) 条件与定理 5.1 相同. 设 u_j 是下述问题的解

$(5.11)_j$ $u_j \in L^2(0,T;V)$, $u_j' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

$(5.7)_j$ $$(u_j', v - u_j(t)) + a(u_j(t), v - u_j(t)) + \Psi_j(v) - \Psi_j(u_j(t)) \geqslant (f(t)), v - u_j(t)), \ \forall v \in V$$

$(5.8)_j$ $$u_j(0) = u_{0j}$$

定理 5.1 的解为 u, 则当 $j \to \infty$ 时,我们有

(5.12) $u_j \to u$ (在 $L^2(0,T;V)$ 中弱)

(5.13) $u_j' \to u'$ (在 $L^2(0,T;V)$ 中弱,在 $L^\infty(0,T;H)$ 中弱*[2)]

注 5.2 由于 Ψ_j 是可微的,则 $(5.7)_j$ 等价于(见 3.3.1)

(5.14) $$(u_j', v) + a(u_j(t), v) + (\Phi_j(u_j(t)), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V$$

---

1) 因而 u 从 $[0,T]$ 到 V 连续.

2) 若 $\int_0^T (f_j(t), \varphi(t))dt \to \int_0^T (f(t), \varphi(t))dt$, $\forall \varphi \in L^1(0,T;H)$, 则 $f_j \to f$ 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中弱*.

其中令

$$\Phi_j = \varphi_j' \quad \square \tag{5.15}$$

注 5.3 定理 5.2 说明了第 2 节中形式地取极限的合理性。 $\square$

在证明定理 5.1 和 5.2 (后面 5.5 和 5.6) 之前，对于第 3 节中的例子我们来验证条件(5.3)，(5.4)，(5.5)。

5.3 条件的验证

对下述例子验证所用方法是一般的。 假设 ϕ 由例 3.3 (图 8) 给定，而

$$\varphi(v) = \int_\Gamma \phi(v) d\Gamma \tag{5.16}$$

我们引进 ϕ_j (图 12)，

$$\phi_j(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - g_1^2/2j, & \lambda \leqslant h_1 + g_1/j \\ \frac{1}{2} j(\lambda - h_1)^2, & h_1 + g_1/j \leqslant \lambda \leqslant h_1 \\ 0, & h_1 \leqslant \lambda \leqslant h_2 \\ \frac{1}{2} j(\lambda - h_2)^2, & h_2 \leqslant \lambda \leqslant h_2 + 1 \\ j(\lambda - h_2) - j/2, & h_2 + 1 \leqslant \lambda \end{cases}$$

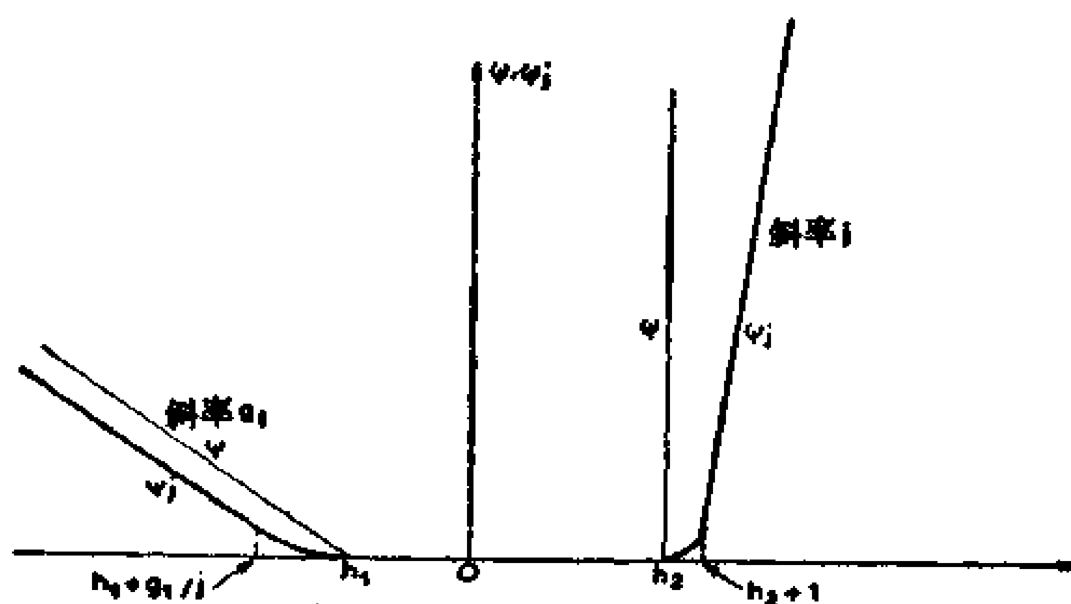


图 12

然后 ψ_j 定义为

(5.18) $$\psi_j(v) = \int_\Gamma \phi_j(v)d\Gamma,\quad v \in H^1(\Omega)$$

那么(5.3)可直接得到，譬如，对 $\varphi_j = 0(\forall j)$，(5.4)成立。剩下要验证(5.5)。

由紧致定理(例如见 Lions-Magenes [1]，第1章)得到，若 $v_j \to v$，$\partial v_j/\partial t \to \partial v/\partial t$ (在 $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ 中弱)，则

(5.19) $$v_j \to v,\ \text{在 } L^2(\Sigma) \text{ 中强}$$

另外，引进M如下：

(5.20) $$M(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda \leqslant h_2 \\ \frac{1}{2}(\lambda - h_2)^2, & \text{若 } h_2 \leqslant \lambda \leqslant h_2 + 1 \\ \lambda - h_2 - \frac{1}{2}, & \text{若 } h_2 + 1 \leqslant \lambda \end{cases}$$

那么

(5.21) $$\int_0^T \psi_j(v_j)dt = \int_\Sigma \phi_j(v_j)d\Sigma \geqslant j\int_\Sigma M(v_j)d\Sigma$$

又，由于

$$\int_0^T \psi_j(v_j)dt \leqslant c$$

故

$$\int_\Sigma M(v_j)d\Sigma \to 0$$

而由(5.19)

$$\int_\Sigma M(v_j)d\Sigma \to \int_\Sigma M(v)d\Sigma$$

由此

(5.22) $$\int_\Sigma M(v)d\Sigma = 0$$

从而

(5.23) $$v \leqslant h_2,\ \text{p.p. 在 } \Sigma \text{ 上}$$

现令

$$\theta(\lambda)=\begin{cases} g_1(\lambda-h_1), & \lambda\leqslant h_1\\ 0, & \lambda\geqslant h_1\end{cases}$$

$$\theta_j(\lambda)=\begin{cases} g_1(\lambda-h_1)-g_1^2/2j, & \lambda\leqslant h_1+g_1/j\\ \frac{1}{2}j(\lambda-h_1)^2, & h_1+g_1/j\leqslant\lambda\leqslant h_1\\ 0 & h_1\leqslant\lambda\end{cases}$$

我们有

$$(5.24)\quad \int_\Sigma \phi_j(v_j)d\Sigma\geqslant\int_\Sigma \theta_j(v_j)d\Sigma$$

$$=\int_\Sigma \theta(v_j)d\Sigma+\int_\Sigma (\theta_j(v_j)-\theta(v_j))d\Sigma$$

但
$$\left|\int_\Sigma (\theta_j(v_j)-\theta(v_j))d\Sigma\right|\leqslant c/j$$

又

$$\int_\Sigma \theta(v_j)d\Sigma\to\int_\Sigma \theta(v)d\Sigma=(\text{由 }(5.23))\int_0^T\psi(v)dt$$

于是(5.24)给出

$$\lim\inf\int_\Sigma \phi_j(v_j)d\Sigma\geqslant\int_0^T \psi(v)dt \quad \square$$

5.4 其它逼近方式

定理 5.2 在应用中归结为用 1 型函数 ϕ_j 逼近(在适当意义下) 3 型函数 ϕ.

逼近的进行是通过正则化(在 ϕ 不可微的那些点的的邻域)和补偿(在 $\phi=+\infty$ 的点).

在定理 5.2 中还能假定泛函 ψ_j 处处有限而不必可微.

这归结为只用补偿法逼近 ϕ.

若我们取 5.3 中的例 3.3，则可用如下定义的 ϕ_j (见图 13)"逼近" ϕ

$$(5.25)\quad \phi_j(\lambda)=\begin{cases}\phi(\lambda), & \lambda\leqslant h_2\\ j(\lambda-h_2), & \lambda\geqslant h_2\end{cases}$$

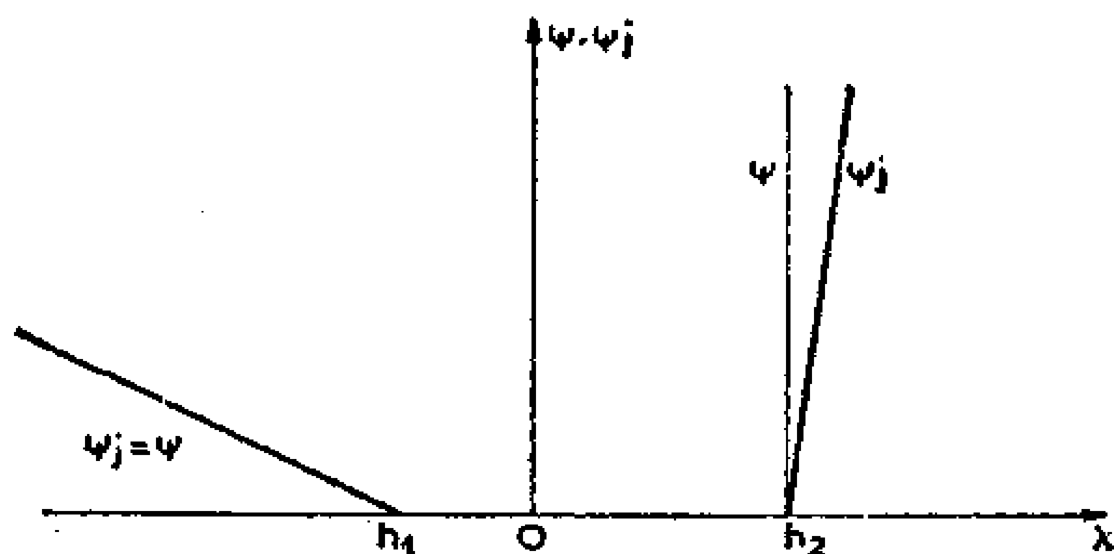


图 13

5.5 定理 5.1 (和 5.2) 中唯一性的证明

设 u 和 u_* 是两个可能的解. 在不等方程(5.7)(相应地, 在关于 u_* 的类似不等方程)中取 $v = u_*(t)$ (相应地, $v = u(t)$), 这是允许的,再把两个不等式相加,令 $w = u - u_*$, 即得

$$-(w'(t), w(t)) - a(w(t), w(t)) \geqslant 0$$

或(由 (5.1))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \alpha\|w(t)\|^2 \leqslant c|w(t)|^2$$

于是,特别有

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 2c|w(t)|^2$$

再结合 $w(0) = 0$, 即证得 $w(t) = 0$. □

5.6 定理 5.1 和 5.2 的证明

证明的路线如下:

1) 求解 (5.14) 和 $u_j(0) = u_{0j}$.

2) 对 u_j 的先验估计,导出 (5.12) 和 (5.13).

3) 证明所得到的 u 是(5.7)的解. □

5.6.1 (5.14)的求解

设 $w_1,\cdots,w_m\cdots$ 是 V 的一个"基"，其意义是： 对任意 m，$w_1,\cdots,w_m$ 线性无关，且有限和 $\sum\xi_j w_j$ 在 V 中稠密． 当 V 可分时，这种"基"总存在．因而我们作 V 可分的假定(这一条件丝毫不是本质的)．选择 w_1,w_2，使

(5.26) u_{0j} 和 φ_j 属于由 w_1 和 w_2 所张成的空间 $[w_1,w_2]$

$u_{jm}(t)$ 定义作下列非线性(常)微分方程组的解：

(5.27) $u_{jm}(t)\in[w_1,\cdots w_m]=w_1,\cdots,w_m$ 所张成的空间

(5.28) $(u'_{jm},w_k)+a(u_{jm}(t),w_k)+(\Phi_j(u_{jm}(t)),w_k)$
$=(f(t),w_k)$，$1\leqslant k\leqslant m$

(5.29) $u_{jm}(0)=u_{0j}$ (由于(5.26)，当 $m\geqslant 2$ 时这是允许的)

若

$$u_{jm}(t)=\sum_{k=1}^{m}g_{jk}(t)w_k$$

则我们有一个 g_{jk} 的微分方程组——这就在一个区间 $[0,t_m](t_m>0)$ 内定义了 $u_{jm}(t)$.

下面的先验估计证明了 $t_m=T$. $\square$

先验估计(I) 按照(5.26)我们有

(5.30) $(u'_{jm},\varphi_j)+a(u_{jm}(t),\varphi_j)+(\Phi_j(u_{jm}(t)),\varphi_j)$
$=(f(t),\varphi_j)$

(5.28)乘以 $g_{jk}(t)$，对 k 求和再减去(5.30)(注意，$\Phi_j(\varphi_j)=0$)即得

(5.31) $(u'_{jm}(t),u_{jm}(t)-\varphi_j)+a(u_{jm}(t),u_{jm}(t)-\varphi_j)$
$+(\Phi_j(u_{jm}(t))-\Phi_j(\varphi_j),u_{jm}(t)-\varphi_j$
$=(f(t),u_{jm}(t)-\varphi_j)$

但 Φ_j 是单调的，即

(5.32) $(\Phi_j(u)-\Phi_j(v),u-v)\geqslant 0$[1]

---

1) 一个凸函数 Ψ_j 的导数是单调的；事实上

$$\Psi_j(v)-\Psi_j(u)-(\Phi_j(u),v-u)\geqslant 0$$

交换 u 和 v 并相加即得(5.32).

于是由(5.31)推出

$$(5.33)\qquad (u'_{jm}, u_{jm}(t)-\varphi_j)+a(u_{jm}(t), u_{jm}(t)-\varphi_j)\leqslant (f(t), u_{jm}(t)-\varphi_j)$$

由此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{jm}-\varphi_j|^2+a(u_{jm}(t), u_{jm}(t))\leqslant a(u_{jm}(t),\varphi_j)+(f(t), u_{jm}(t)-\varphi_j)$$

于是 (c 表示不同常数):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{jm}(t)-\varphi_j|^2+\alpha\|u_{jm}(t)\|^2\leqslant c|u_{jm}(t)|^2+c\|u_{jm}(t)\|\|\varphi_j\|+c\|f(t)\|_*\|u_{jm}(t)-\varphi_j\|$$

其中 $\|f\|_*$ 为 V' 中的范数.

按照(5.4), $\|\varphi_j\|\leqslant c$, 故有

$$\frac{d}{dt}|u_{jm}(t)-\varphi_j|^2+2\alpha\|u_{jm}\|^2\leqslant c|u_{jm}(t)-\varphi_j|^2+\alpha\|u_{jm}(t)\|^2+c(1+\|f(t)\|_*^2)$$

由此

$$(5.34)\qquad |u_{jm}(t)-\varphi_j|^2+\alpha\int_0^t\|u_{jm}(\sigma)\|^2d\sigma\leqslant c\int_0^t|u_{jm}(\sigma)-\varphi_j|^2d\sigma+c\left(t+\int_0^t\|f(\sigma)\|_*^2d\sigma\right)+|u_{0j}-\varphi_j|^2$$

特别令 $|u_{jm}(t)-\varphi_j(t)|^2=\eta(t)$, 我们有

$$(5.35)\qquad \eta(t)\leqslant c\int_0^t\eta(\sigma)d\sigma+d$$

$$d\leqslant c\left(T+\int_0^T\|f(\sigma)\|_*^2d\sigma\right)+|u_{0j}-\varphi_j|^2$$

根据 Gronwall 不等式,(5.35)蕴涵

$$(5.36)\qquad \eta(t)\leqslant d\exp(ct)$$

由此得到

(5.37) $\quad u_{jm}\in L^\infty(0,T;H)$ 中一(不依赖于 j 和 m 的)有界集

而在 (5.34) 中令 $t=T$，则有

(5.38) $\quad u_{jm}\in L^2(0,T;V)$ 中一(不依赖于 j 和 m 的)有界集

先验估计 (II) 我们现在要得到类似于 (5.37) 和 (5.38) 的对 u'_{jm} 的估计。

首先由(5.28)和(5.29)推出

$$
\begin{aligned}
(u'_{jm}(0), w_k) &= (f(0), w_k) - [a(u_{0j}, w_k) \\
&\quad + (\Phi_j(u_{0j}), w_k)] \\
&= (\text{根据 } (5.10))\ (f(0) - k_j, w_k)
\end{aligned}
$$

由此

$$|u'_{jm}(0)|^2 = (f(0) - k_j, u'_{jm}(0))$$

因此

$$|u'_{jm}(0)| \leqslant |f(0) - k_j| \tag{5.39}$$

现对 t 微分 (5.28)[1]；即得

$$
\begin{aligned}
&(u''_{jm}(t), w_k) + a(u'_{jm}(t), w_k) + ((\Phi_j(u_{jm}(t)))', w_k) \\
&= (f'(t), w_k)
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

注意

$$(\Phi_j(u_{jm}(t))', u'_{jm}(t)) \geqslant 0 \tag{5.41}$$

这是因为根据 Φ_j 的单调性有

$$(\Phi_j(u_{jm}(t+h) - \Phi_j(u_{jm}(t)),\quad u_{jm}(t+h) - u_{jm}(t)) \geqslant 0$$

于是利用(5.41)，由(5.40)推出

$$
\begin{aligned}
&(u''_{jm}(t), u'_{jm}(t)) + a(u'_{jm}(t), u'_{jm}(t)) \\
&\leqslant (f'(t), u'_{jm}(t))
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_{jm}(t)|^2 + \alpha\|u'_{jm}(t)\|^2 \\
&\leqslant c|u'_{jm}(t)|^2 + \|f'(t)\|_*\|u'_{jm}(t)\|
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

象对 u_{jm} 所做的那样，由(5.39)和(5.43)我们导出

---

1) 当 Φ_j 是 Lipschitz 函数时，以下的推演正确，否则，应以差商代替导数。

(5.44) $u'_{jm} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ 中的一个与 j,m 无关的有界集 □

对 m 过渡到极限

由于 $u_{jm}(0) = u_{0j}$, $\|u_{0j}\| \leqslant C$ 并根据 (5.44)

(5.45) $$u_{jm} \in L^\infty(0,T;V) \text{ 的一有界集}$$

于是

(5.46) $$\Phi_j(u_{jm}) \in L^\infty(0,T;V') \text{ 的一有界集}$$

从而可以取子序列 $u_{j\mu}$，使

(5.47) $$\begin{cases} u_{j\mu} \to u_j, \text{ 在 } L^\infty(0,T;V) \text{ 中弱}^* \\ \quad u'_{j\mu} \to u'_j, \text{ 在 } L^2(0,T;V) \text{ 中} \\ \text{弱且在 } L^\infty(0,T;H) \text{ 中弱}^* \\ \Phi_j(u_{j\mu}) \to \chi_j, \text{ 在 } L^\infty(0,T;V') \text{ 中弱}^* \end{cases}$$

并且

(5.48) $$\|u_j\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'_j\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'_j\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C$$

根据 (5.47)，$u_{jm}(0) \to u_j(0)$ 在 V 中弱，故

$$u_j(0) = u_{0j}$$

在 (5.28) 中令 $m = \mu$; 固定 $k(<\mu)$，再取极限则有

$$(u'_j, w_k) + a(u_j, w_k) + (\chi_j, w_k) = (f, w_k)$$

这对任意 k 成立，而有限和 $\sum \xi_k w_k$ 在 V 中稠密，由此推出

(5.49) $$(u'_j, v) + a(u_j, v) + (\chi_j, v) = (f, v), \quad \forall v \in V$$

如果证明了

(5.50) $$\chi_j = \Phi_j(u_j),$$

我们就解出 (5.14)。为此，可利用"单调论证"。

由 Φ_j 的单调性，对任意 $\varphi \in L^2(0,T;V)$，有

(5.51) $$X_m = \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}) - \Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi)\, dt \geqslant 0$$

而根据 (5.28)

$$X_m = -\int_0^T [(u'_{jm}, u_{jm}) + a(u_{jm}, u_{jm}) - (f, u_{jm})]\, dt$$
$$- \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}), \varphi)\, dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}|u_{jm}(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_{jm}, u_{jm})dt$$
$$+ \int_0^T (f, u_{jm})dt - \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}), \varphi)dt$$
$$- \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi)dt$$

由于 $u_{jm}(T) \to u_j(T)$ 在 V 中弱，我们有

$$\lim\sup(-|u_{jm}(T)|^2) \leqslant -|u_j(T)|^2$$

于是

$$0 \leqslant \lim\sup X_m \leqslant -\frac{1}{2}|u_j(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_j, u_j)dt + \int_0^T (f, u_j)dt - \int_0^T (\chi_j, \varphi)dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_j - \varphi)dt \tag{5.52}$$

由(5.49)推出

$$-\frac{1}{2}|u_j(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_j, u_j)dt + \int_0^T (f, u_j)dt = \int_0^T (\chi_j, u_j)dt$$

于是(5.52)蕴涵

$$\int_0^T (\chi_j - \Phi_j(\varphi), u_j - \varphi)dt \geqslant 0 \tag{5.53}$$

取 $\varphi = u_j - \lambda\theta$, $\lambda > 0$, $\theta \in L^2(0, T; V)$；除以 λ 即得

$$\int_0^T (\chi_j - \Phi_j(u_j - \lambda\theta), \theta)dt \geqslant 0$$

令 $\lambda \to 0$

$$\int_0^T (\chi_j - \Phi_j(u_j), \theta)dt \geqslant 0, \ \forall\theta \in L^2(0, T; V)$$

由此得 (5.50)。 □

5.6.2 u_j 和 u_j' 的估计

我们已经得到 (5.48)。此外，由(5.14)推出 $(5.7)_j$。设

$$v_0 \in L^2(0, T; V)$$

使得

$$\int_0^T \phi(v_0)dt < \infty$$

在 $(5.7)_j$ 中取 $v = v(t) = v_0(t)$; 便可推出

$$\int_0^T \Psi_j(u_j(t))dt \leqslant \int_0^T \{(u_j', v_0 - u_j) + a(u_j, v_0 - u_j) + \Psi_j(v_0) - (f, v_0 - u_j)\}dt \tag{5.54}$$

根据(5.48)和(5.3),由(5.54)得

$$\int_0^T \Psi_j(u_j(t))dt \leqslant C \tag{5.55}$$

可取子序列,仍记为 u_j, 使

$$\begin{cases} u_j \to u, \text{ 在 } L^2(0,T;V) \text{ 弱} \\ u_j' \to u', \text{ 在 } L^2(0,T;V) \text{ 弱且在 } L^\infty(0,T;H) \text{ 弱}^* \end{cases} \tag{5.56}$$

由(5.5)得

$$\liminf \int_0^T \Psi_j(u_j)dt \geqslant \int_0^T \Psi(u)dt \tag{5.57}$$

由于在 V 中 $u_{0j} \to u_0$ 且 $u_j(0) \to u(0)$ 在 V 中弱,又 $u_j(0) = u_{0j}$,故有 (5.8)。

5.6.3 (5.7) 的验证

在 $(5.7)_j$ 中取 $v = v(t)$, 这里 $t \to v(t)$ 是 $L^2(0,T;V)$ 的任一元素. 由此得

$$\int_0^T [(u_j', v) + a(u_j, v) + \Psi_j(v) - (f, v - u_j)]dt \geqslant \int_0^T [(u_j', u_j) + a(u_j, u_j) + \Psi_j(u_j)]dt \tag{5.58}$$

(5.58) 右端等于

$$Y_j = \frac{1}{2}|u_j(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_{0j}|^2 + \int_0^T a(u_j, u_j)dt + \int_0^T \Psi_j(u_j)dt$$

且特别利用(5.57),则得

$$\liminf Y_j \geqslant \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T a(u,u)\,dt + \int_0^T \Psi(u)\,dt$$
$$= \int_0^T [(u',u) + a(u,u) + \psi(u)]\,dt$$

于是从(5.58)导出

$$(5.59)\qquad \int_0^T [(u',v-u) + a(u,v-u) + \psi(v) - \psi(u) - (f,v-u)]\,dt \geqslant 0,$$
$$\forall v \in L^2(0,T;V) \qquad \square$$

设 $s \in]0,T[$（暂时）为任意固定值，$w \in V$ 为任意值．取 s 的邻域族

$$\mathcal{O}_k =]s - 1/k, s + 1/k[$$

又定义 v 为

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin \mathcal{O}_k \\ w, & t \in \mathcal{O}_k \end{cases}$$

于是 (5.59) 给出

$$(5.60)\qquad \int_{\mathcal{O}_k} [(u',w) + a(u,w) + \psi(w) - (f,w)]\,dt - \int_{\mathcal{O}_k} [(u',u) + a(u,u) + \psi(u) - (f,u)]\,dt \geqslant 0$$

由此

$$(5.61)\qquad \left(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} u'(t)\,dt, w\right) + a\left(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} u(t)\,dt, w\right) + \psi(w) - \left(|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} f(t)\,dt, w\right)$$
$$- |\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} [(u',u) + a(u,u) + \psi(u) - (f,u)]\,dt \geqslant 0$$

其中 $|\mathcal{O}_k|$ 表示 $\mathcal{O}_k$ 的测度．但一般说来，若 g 是数值或向量值可测函数，则（Lebesgue 定理）

$$|\mathcal{O}_k|^{-1}\int_{\mathcal{O}_k} g(t)dt \to g(s)$$

对几乎所有的 s 成立，于是由(5.61)得到，可能除去一个例外点的零测集中的 s，我们有

$$(u'(s),w-u(s))+a(u(s),w-u(s))+\psi(w)-\psi(u(s))$$
$$\geqslant (f(s),w-u(s))$$

由此得(5.7)．由于极限 u 唯一，取 u_j 的子序列是不必要的，而定理 5.1 和 5.2 得证．

6. 解的正性和可比较性

6.1 解的正性

按通常方式，对实值函数 v，令

(6.1) $$v^+=\sup(v,0),\quad v^-=\sup(-v,0)$$

我们将应用定理 5.1，在所有的情况下，总是取

(6.2) $$V=H^1(\Omega)$$ [1)]

而 $a(u,v)$ 由(3.62)给定，即

(6.3) $$a(u,v)=\int_\Omega a_{ij}(x)u_{,j}v_{,i}dx$$

且(3.63)满足．

我们注意 $v\to v^+$ 和 $v\to v^-$ 是从 $H^1(\Omega)$ 到其自身的连续(实为压缩)映射．这些假设建立以后，我们要证明

定理 6.1 设定理 5.1 的条件和(6.2)，(6.3)成立．又设泛函 ψ 满足

(6.4) $$\psi(v)\geqslant\psi(v^+),\quad \forall v\in V$$

此外还假设

(6.5) $f\geqslant 0$，p.p. 在 Ω 中，$u_0\geqslant 0$，p.p. 在 Ω 中则定理 5.1 提供的解 u 满足

---

1) 当 $V=H_0^1(\Omega)$ 或例如，V 是 $H^1(\Omega)$ 中在 Γ 的部分 Γ_0 上为零的函数空间，变形是容易的．

(6.6) $$u \geqslant 0, \text{ p.p. 在 } Q \text{ 中}$$

证明　在不等方程

(6.7) $$(u'(t), v-u(t)) + a(u(t), v-u(t)) + \psi(v) - \psi(u(t)) \geqslant (f(t), v-u(t))$$

中取 $v = u^+(t)$。于是由 $u^+(t) - u(t) = u^-(t)$，可推出

(6.8) $$(u'(t), u^-(t)) + a(u(t), u^-(t)) + \psi(u^+(t)) - \psi(u(t)) \geqslant (f(t), u^-(t))$$

但

(6.9) $$\begin{cases} a(\varphi, \varphi^-) = -a(\varphi^-, \varphi^-) \ (\text{因 } a(\varphi^+, \varphi^-) = 0) \\ (u'(t), u^-(t)) = -((u^-(t))', u^-(t)) \end{cases}$$

从而(6.8)等价于

(6.10) $$((u^-(t))', u^-(t)) + a(u^-(t), u^-(t)) + \psi(u(t)) - \psi(u^+(t)) + (f(t), u^-(t)) \leqslant 0$$

但按(6.4)，$\psi(u(t)) - \psi(u^+(t)) \geqslant 0$，又因(6.5)，$f(t) \geqslant 0$，由定义 $u^-(t) \geqslant 0$，故有

$$(f(t), u^-(t)) \geqslant 0$$

从而由(6.10)推出

(6.11) $$((u^-(t)', u^-(t)) + a(u^-(t), u^-(t)) \leqslant 0$$

从(6.11)推出

(6.12) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^-(t)|^2 + \alpha\|u^-(t)\|^2 \leqslant c|u^-(t)|^2$$

特别

(6.13) $$\frac{d}{dt}|u^-(t)|^2 \leqslant 2c|u^-(t)|^2$$

但由(6.5) $u_0 \geqslant 0$，于是 $u^-(0) = 0$，再结合(6.13)就证明了 $u^-(t) = 0$，故(6.6)得证。▯

例 6.1　假设(见第 3 节)

(6.14) $$\psi(v) = \int_\Gamma \phi(v)\, d\Gamma$$

ϕ 满足

(6.15) $$\phi(\lambda) \geqslant \phi(0), \quad \lambda \leqslant 0$$

于是有 $\phi(\lambda) \geqslant \phi(\lambda^+)$，$\forall \lambda \in \mathbf{R}$，故(6.4)成立。第 3 节中的所有例子均满足性质 (6.15)

例 6.1.1　设 ϕ 由 (3.33) (图 9) 给定。我们看到，解 u 不依赖于 $\lambda \leqslant 0$ 时 ϕ 的值。换言之，若 $f \geqslant 0$ 且 $u_0 \geqslant 0$，温度保持 $\geqslant 0$ (不涉及温度 <0 时的温度控制方式；这时，温度控制只在于加冷，从不加热)。 □

例 6.1.2　假设当 $\lambda \geqslant 0$ 时 $\phi(\lambda) = 0$ 而当 $\lambda \leqslant 0$ 时 $\phi(\lambda) \geqslant 0$[1]。于是，由 $u \geqslant 0$ 得 $\Psi(u) = 0$，$\Psi(v) \geqslant 0$，而解 u 与 $\Psi = 0$ 时的解相同，即

$$
(6.16)\qquad \begin{cases} (u', v) + a(u, v) = (f, v), & \forall v \in H^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\partial u/\partial t - (a_{ij}u_{,j})_{,i} = f \\
&\partial u/\partial \nu_A = 0, \text{ 在 } \Sigma \text{ 上} \\
&u(x, 0) = u_0(x), \text{ 在 } \Omega \text{ 内}
\end{aligned}
$$
□

6.2　解的比较 (I)

我们要比较对应两个不同泛函 Ψ 和 $\hat{\Psi}$ 的解 u 和 $\hat{u}$

定理 6.2　假设定理 5.1 的条件和 (6.2)，(6.3) 成立。设 Ψ 和 $\hat{\Psi}$ 是两个 (具定理 5.1 中 Ψ 的性质的)泛函，对任意 $v, \hat{v} \in H^1(\Omega)$，满足

$$
(6.17)\qquad \Psi(\sup(v, \hat{v})) + \hat{\Psi}(\inf(v, \hat{v})) \leqslant \Psi(v) + \hat{\Psi}(\hat{v})
$$

设 u (相应地，$\hat{u}$) 是由对于 Ψ (相应地，$\hat{\Psi}$) 的定理 5.1 给的解，其余规定相同，则有

$$
(6.18)\qquad u \geqslant \hat{u}, \text{ p.p. 在 } Q \text{ 中}
$$

证明．引入

$$
(6.19)\qquad \begin{cases} w = \sup(u, \hat{u}) = u + (\hat{u} - u)^+ \\ \hat{w} = \inf(u, \hat{u}) = \hat{u} - (\hat{u} - u)^+ \end{cases}
$$

---

1) 这是半渗透壁的情形，它只允许热量进入且与一个温度为零的外部介质接触．

注意 $w+\hat{w}=u+\hat{u}$。

在 (6.7) 中取 $v=w$，而在关于 $\hat{u}$ 的类似不等方程中取 $v=\hat{w}$。令

(6.20) $$\theta=\hat{u}-u$$

便得

$$-(\theta',\theta^+)-a(\theta,\theta^+)+\Psi(w)+\Psi(\hat{w})$$
$$-\Psi(u)-\hat{\Psi}(\hat{u})\geqslant 0$$

考虑到(6.17)，由此得

(6.21) $$(\theta',\theta^+)+a(\theta,\theta^+)\leqslant 0$$

于是

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta^+(t)|^2+a(\theta^+,\theta^+)\leqslant 0$$

由此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta^+(t)|^2+\alpha\|\theta^+(t)\|^2\leqslant c|\theta^+(t)|^2$$

由于 $u(0)=\hat{u}(0)=u_0,\theta^+(0)=0$，于是 $\theta^+=0$，由此得(6.18)。□

例 6.2　设 Ψ 由(6.14)给定，而 $\hat{\Psi}$ 为

(6.22) $$\hat{\Psi}(v)=\int_\Gamma\hat{\phi}(v)d\Gamma$$

不难验证，若

(6.23) $$\phi(\mu)-\phi(\lambda)\leqslant\hat{\phi}(\mu)-\hat{\phi}(\lambda),\ \forall\lambda,\mu,\mu\geqslant\lambda$$

则(6.17)成立。

例 6.2.1　例如，当 $\hat{\phi}$ 的导数是增函数并且

(6.24) $$\phi(\lambda)=\hat{\phi}(\lambda-\lambda_0),\ \lambda_0>0$$

时，则(6.23)成立。

这个用于温度控制问题的注释给出下列结果——物理上显然地——若对同一右端项和同一初始温度，以同一方式把温度控制在间隔 (h_1,h_2) 和 $(h_1+\lambda_0,h_2+\lambda_0)$ 内，$\lambda_0>0$，则相应于 $(h_1+\lambda_0,h_2+\lambda_0)$ 的温度高于相应于 (h_1,h_2) 的温度。□

6.3 解的比较 (II)

现在来比较相应于同一泛函 Ψ 但数据 $\{f, u_0\}$ 不同的解. 我们有

定理 6.3 设定理 5.1 的条件和(6.2),(6.3)成立. 设 u (相应地 $\hat{u}$) 是定理 5.1 给的相应于 $\{f,u_0\}$ (相应地 $\{\hat{f},\hat{u}_0\}$) 的解. 设

(6.25) $f \geqslant \hat{f}$ (p.p. 于 Q 内), $u_0 \geqslant \hat{u}_0$ p.p. 于 Ω 内

而泛函 Ψ 满足,对任意 $v,\theta \in H^1(\Omega)$ 有

(6.26) $\Psi(v) + \Psi(\theta) - \Psi(\sup(v,\theta)) - \Psi(\inf(v,\theta)) \geqslant 0$

则

(6.27) $$u \geqslant \hat{u} \ (\text{p.p. 于 } Q)$$

证明. 证明原则与定理 6.2 相同. 用同样的记号得

$$-(\theta',\theta^+) - a(\theta,\theta^+) + \Psi(w) + \Psi(\hat{w}) - \Psi(u) - \Psi(\hat{u}) \geqslant (f - \hat{f},\theta^+)$$

考虑到 (6.26), 由此推出

(6.28) $$(\theta',\theta^+) + a(\theta,\theta^+) + (f - \hat{f},\theta^+) \leqslant 0$$

但由 (6.25), $(f - \hat{f},\theta^+) \geqslant 0$, 于是 (6.28) 导致

(6.29) $$(\theta',\theta^+) + a(\theta,\theta^+) \leqslant 0$$

但 $\theta^+(0) = (\hat{u}_0 - u_0)^+ = 0$ (根据 (6.25)), 于是 $\theta^+(t) = 0$, 故 (6.27) 成立. □

例 6.3 若设 Ψ 由 (6.14) 给定,则 (6.26) 成立. 确切地说

(6.30) $\Psi(v) + \Psi(\theta) - \Psi(\sup(v,\theta)) - \Psi(\inf(v,\theta)) = 0$

例 6.3.1 应用于温度控制问题,这一结果说明——物理上仍显然——若以同样方式控制,设 u (相应地, $\hat{u}$) 是相应于右端项 f (相应地, $\hat{f}$) 和一个初始温度 u_0 (相应地, $\hat{u}_0$) 的温度; 若 $f \geqslant \hat{f}$ 且 $u_0 \geqslant \hat{u}_0$, 则我们有 $u \geqslant \hat{u}$ p.p.

特别,若 ϕ 由图 9 给定且 $u_0(x) \geqslant u_1(x)$ 满足

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant h_2(x), \text{ 那么 } u(x,t) \geqslant u_1(x) \quad □$$

7. 稳 定 问 题

现在回到 3.5 的情形，其中

$$(7.1)\qquad a(u,v)=\int_\Omega a_{ij}(x)u_{,j}v_{,i}dx$$

这里 $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$ 满足 (3.63)。

首先考虑 $a(u,v)$ 代之以 $a(u,v)+c(u,v)(c>0)$ 的情形。

7.1 严格强制情形

本节取

$$(7.2)\qquad V=H^1(\Omega),\ \Omega \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 的有界开集}$$

于是在条件(3.63)之下有

$$(7.3)\qquad a(v,v)\geqslant\alpha\int_\Omega v_{,i}v_{,i}dx$$

但 $a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ 不成立；反而有 $a(1,1)=0$。

反之，显然有

$$(7.4)\qquad a(v,v)+c|v|^2\geqslant\min(\alpha,c)\|v\|^2_{H^1(\Omega)}=\min(\alpha,c)\|v\|^2$$

这里令 $|v|^2=\int_\Omega v^2dx$，$\|v\|=\|v\|_{H^1(\Omega)}$。

本节如(3.10)中那样[1]取 φ 为

$$(7.5)\qquad \varphi(v)=\int_\Gamma\phi(v(x))d\Gamma$$

或更一般地

$$(7.6)\qquad \varphi(v)=\int_\Gamma\phi(x;v(x))d\Gamma\quad(\text{见注 3.2})$$

我们做类似于 (5.3)，(5.4)，(5.5) 的假设：设存在一族 V 上的可微函数 φ_i，满足

$$(7.7)\qquad \forall v\in V,\ \varphi_i(v)\to\varphi(v)$$

---

1) 不失一般性，当 φ 由 (3.11) 给出时，有类似于下面的结果。

(7.8) $\left|\begin{array}{l}(\text{与}(5.4)\text{相同})\text{存在} V \text{中的有界序列} \varphi_i \text{满足} \\ \qquad\qquad \psi_i'(\varphi_i) = 0, \ \forall i\end{array}\right.$

(7.9) $\left|\begin{array}{l}\text{若} v_i \to v \text{ 在 } V \text{ 弱}, \psi_i(v_i) \leqslant \text{常数},\text{则} \\ \qquad\qquad \liminf \psi_i(v_i) \geqslant \psi(v)\end{array}\right.$

定理 7.1 设条件(3.63),(7.7),(7.8),(7.9)成立. 设 $c > 0$, 并且 $v \to (f,v)$ 是 V 上的连续线性型. 则存在唯一的 $u \in V$ 满足

(7.10) $$a(u,v-u) + c(u,v-u) + \psi(v) - \psi(u) \geqslant (f,v-u), \quad \forall v \in V$$

注 7.1 在 $a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u,v$ 时 (见 (3.73)), 问题(7.10)等价于求使泛函

(7.11) $$J(v) = \frac{1}{2}[a(v,v) + c|v|^2] + \psi(v) - (f,v)$$

取最小值的 u. 这时,证明解的存在性是直接的(无须引入 ψ_i). 事实上, 问题等价于使泛函 J 在满足 $\psi(v) < \infty$ 的 v 的闭凸集(可能等于 V)上取最小值; 而函数 $v \to J(v)$ 是凸的, 对 V 的弱拓扑是下半连续的且(由于项 $c|v|^2$ 的引入) $J(v) \to +\infty$ (当 $\|v\| \to \infty$ 时), 由此得到解的存在性. 另外, 由于 $v \to J(v)$ 是严格凸的, 我们又有解的唯一性,由此,在对称情形下,定理成立. □

唯一性的证明,证明类似于 5.5, 且更简单, 设 u 和 u_* 是两个可能的解; 若在(7.10)(相应地, 在关于 u_* 的类似不等方程)中取 $v = u_*$ (相应地, $v = u$) 并把所得的两式相加, 令 $w = u - u_*$, 便推出

$$-a(w,w) - c|w|^2 \geqslant 0$$

由(7.4),便得 $w = 0$. □

存在性证明要点[1]

1) 首先以 ψ_i 代 (7.10) 中的 ψ_i 因而要求

(7.12) $$a(u_i,v-u_i) + c(u_i,v-u_i) + \psi_i(v) - \psi_i(u_i)$$

1) 这个证明可以跳过,这里只给出证明的关键步骤.

$$\geqslant (f, v - u_i),\ \forall v \in V$$

的解，由于 Ψ_i 是可微的，故不等方程(7.12)等价于方程

(7.13) $a(u_i, v) + c(u_i, v) + (\Phi_i(u_i), v) = (f, v),\ \forall v \in V$

其中令

(7.14) $$\Phi_i = \Psi_i'$$

为了解(7.13)，我们利用 Galerkin 法。如 5.6.1 那样（$\varphi_i \in w_1$ 张的空间）取 V 的一个"基" $w_1, \cdots, w_m \cdots$，求 u_{jm} 满足

(7.15) $u_{jm} \in [w_1, \cdots w_m]$

(7.16) $$a(u_{jm}, w_k) + c(u_{jm}, w_k) + (\Phi_j(u_{jm}), w_k) = (f, w_k),\ 1 \leqslant k \leqslant m$$

(7.15)，(7.16) 解 u_{jm} 的存在性由 Brouwer 不动点定理推出（例如见 Lions[1]，引理 4.3，53 页）。

u_{jm} **的先验估计**，由于对一适当的实数 ξ 有 $\varphi_i = \xi w_1$，故由(7.16)我们有

(7.17) $$a(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_i) + c(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_i) + (\Phi_i(u_{jm}) - \Phi_i(\varphi_i), u_{jm} - \varphi_i) = (f, u_{jm} - \varphi_i) \quad (\text{因 } \Phi_i(\varphi_i) = 0)$$

由于 Φ_i 单调，故由(7.17)推出

(7.18) $$a(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_i) + c(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_i) \leqslant (f, u_{jm} - \varphi_i)$$

由此 ($\alpha_1 = \min(\alpha, c)$)

$$\alpha_1 \|u_{jm}\|^2 \leqslant c_1 \|u_{jm}\| + c_2$$

从而

(7.19) $$\|u_{jm}\| \leqslant c_3$$

c_3 为不依赖于 j 和 m 的一个常数。

根据 (7.19)，可从 u_{jm} 中取子序列 $u_{j\mu}$，满足

(7.20) $$u_{j\mu} \to u_j,\ \text{在 } V \text{ 中弱}$$

利用 Φ_i 的单调性可以指出（见 Minty[1]，Browder[1]，Lions[1]）：

(7.21) $$\Phi_i(u_{j\mu}) \to \Phi_i(u_j),\quad \text{在 } V' \text{ 弱}$$

且 u_j 满足 (7.13)。另外，由(7.19)推出

$$\|u_j\| \leqslant c_3 \tag{7.22}$$

2) 根据 (7.22)，可从 u_j 中取子序列，仍记 u_j，满足

$$u_j \to u \quad 在 V 弱 \tag{7.23}$$

根据(7.12)，其中令 $v = v_0$，v_0 满足 $\psi(v_0) < \infty$（而由 (7.7)，$\psi_j(v_0) \leqslant$ 常数），即得

$$\psi_j(u_j) \leqslant 常数 \tag{7.24}$$

于是根据 (7.9)

$$\liminf \psi_j(u_j) \geqslant \psi(u) \tag{7.25}$$

我们把(7.12)写成形式

$$\begin{aligned} a(u_j, v) + c(u_j, v) + \psi_j(v) - (f, v - u_j) \\ \geqslant a(u_j, u_j) + c|u_j|^2 + \psi_j(u_j) \end{aligned} \tag{7.26}$$

但 $\liminf\limits_{j} [a(u_j, u_j) + c|u_j|^2] \geqslant a(u, u) + c|u|^2$；由(7.26)推出

$$\begin{aligned} a(u, v) + c(u, v) + \psi(v) - (f, v - u) \\ \geqslant a(u, u) + c|u|^2 + \psi(u) \end{aligned}$$

由此得 (7.10)。 □

注 7.2 上述证明也给出一逼近结果：根据 (7.23)，用(正则化与补偿)方程 (7.13) 的解 u_j 逼近 u。注意，类似于 5.4 的注，在这里也有效。 □

7.2 用 $t \to \infty$ 时发展方程的解逼近稳定状态

注意，条件 (5.3)，(5.5) 可导出 (7.7)，(7.9)((5.4) 和 (7.8) 是一回事)；事实上，只需在 (5.3)，(5.5) 中取一不依赖 t 的函数。我们要证明

定理 7.2 设定理 5.1 的条件成立，又

$$f(t) = f \quad (不依赖于 t) \tag{7.27}$$

设 $u(t) = u$ 是

$$\begin{aligned} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + c(u(t), v \\ - u(t)) + \psi(v) - \psi(u(t)) \geqslant (f, v - u(t)), \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\forall v \in V$$

(7.29) $u(0) = u_0$

的解. 又设 w 是定理 7.1 给定的解,即

(7.30) $$a(w, v - w) + c(w, v - w) + \varphi(v) - \varphi(w) \geqslant (f, v - w),\ \forall v \in V$$

则当 $t \to +\infty$ 时

(7.31) $$u(t) \to w \ (在\ H = L^2(\Omega)\ 中)$$

更精确地

(7.32) $$|u(t) - w| \leqslant c_1 \exp(-c_2 t), c_i > 0$$

证明. 在(7.28)(相应地,(7.30))中取 $v = w$(相应地,$u(t)$),并令

$$m(t) = u(t) - w$$

即可发现

$$-(m'(t), m(t)) - [a(m(t), m(t)) + c|m(t)|^2] \geqslant 0$$

由此

(7.33) $$\frac{d}{dt}|m(t)|^2 + 2\alpha_1\|m(t)\|^2 \leqslant 0$$

但 $\|v\| \geqslant d|v|$, 于是由(7.33)推出

$$\frac{d}{dt}(\exp(2\alpha_1 dt)|m(t)|^2) \leqslant 0$$

由此

(7.34) $$|m(t)|^2 \leqslant |u_0 - w|^2 \exp(-2\alpha_1 dt)$$

这就证明了(7.32)(同时确定了其中的常数). □

推论 7.1 对稳定问题的解,我们有类似于定理 6.1, 6.2, 6.3 所给的正性和可比较性.

证明 事实上,只需在定理 6.1,6.2,6.3 所给的性质中令 t 趋于无穷而取极限. □

注 7.3 自然也可直接证明——用定理 6.1, 6.2,6.3 的证明中的方法——上述推论中给出的诸性质. □

7.3 非严格强制情形

现在考虑 $c = 0$ 的情形，限于对称情形

$$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u,v \in V \tag{7.35}$$

于是问题纳入注 7.1 的结构，其中 $c = 0$，即下述两个问题等价：

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V \text{ 使满足} \\ a(u,v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (f,v-u) \end{cases} \tag{7.36}$$

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V \text{ 使下列泛函取最小值} \\ J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) + \varphi(v) - (f,v) \end{cases} \tag{7.37}$$

由于 $a(1,1) = 0$，故当 $\|v\| \to \infty$ 时 $J(v) \to +\infty$ 可能不成立；于是一般没有存在性（另见注 2.5）。 □

首先给出一个必需的技术性引理。

引理 7.1 存在常数 $\beta_i > 0$，使得对任意 $v \in H^1(\Omega)$ 有

$$a(v,v) + \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma \geqslant \beta_1 \|v\|^2 (\|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)}) \tag{7.38}$$

$$a(v,v) + \left(\int_\Gamma v d\Gamma\right)^2 \geqslant \beta_2 \|v\|^2 \tag{7.39}$$

证明　我们只证明 (7.39)，(7.38) 的证明完全类似。

$$|||v||| = \left(a(v,v) + \left(\int_\Gamma v d\Gamma\right)^2\right)^{1/2}$$

是 V 上的一个范数；事实上，它显然是一个半范数，而若 $|||v||| = 0$，则 $a(v,v) = 0$，由 (7.3)，$v =$ 常数，又 $\int_\Gamma v d\Gamma = 0$，故 $v = 0$.

空间 $H^1(\Omega) = V$ 对于范数 $|||\ |||$ 是完备的. 事实上，设 v_m 对该范数是 Cauchy 序列。 那么对任意 i，$1 \leqslant i \leqslant n$，$v_{m,i}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列且

$$\int_\Gamma v_m d\Gamma \to \xi \in \mathbb{R} \tag{7.40}$$

由于 $v_{m,i}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，故由 Deny-Lions[1] 的结果推出，存在常数 k_m 使

(7.41) $$\begin{cases} v_m + k_m \to v, & \text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中} \\ v_{m,i} \to v_{,i} & \text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中} \end{cases}$$

由(7.41)推出

$$\int_\Gamma (v_m + k_m) d\Gamma \to \int_\Gamma v d\Gamma$$

由这个关系和(7.40)证明 $k_m \to k$，从而 $v_m \to v - k$，在 $H^1(\Omega)$ 中。

考虑从赋以 $\|\ \|$ 的 V 到赋以 $|||\ |||$ 的 V 的映射 I（即恒等映射），它是线性的，且有一个闭图象，因为由 $|||\ |||$ 定义的拓扑比由 $\|\ \|$ 定义的拓扑更细。由于 V 对两个范数皆为 Banach（实为 Hilbert）空间，由闭图象定理（例如见 Bourbaki [1]）推出，映射 I 连续，于是存在常数 c，使

$$\|v\| \leqslant c|||v|||$$

由此即得(7.39)。 □

由(7.39)立刻推出，若 $\phi(\lambda)$ 当 $\lambda \to \pm\infty$ 时比线性函数增长更快（即 $\phi(\lambda)/\lambda \to \pm\infty$，当 $\lambda \to \pm\infty$ 时）（特别当对充分大的 $|\lambda|$ 有 $\phi(\lambda) = +\infty$ 时），则当 $\|v\| \to \infty$ 时 $J(v) \to +\infty$，由此立得解的存在性。

有趣的情形——在实际中也是有用的——是 $\phi(\lambda)$ 当 $\lambda \to +\infty$ 或（和）$\lambda \to -\infty$ 时 $\phi(\lambda)$ "线性增长"的情形。于是我们引入

(7.42) $$\phi_\pm = \lim \phi(\lambda)/\lambda$$

设 ϕ_+ 和 ϕ_- 至少有一个是有限数[1]；我们总假设

(7.43) $$\phi_- < 0 < \phi_+$$

注 7.4 当 $\phi(\lambda) = \phi(x;\lambda)$ 时，还引入

(7.44) $$\phi_\pm(x) = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \phi(x;\lambda)/\lambda$$

设这个极限关于 $x \in \Gamma$ 一致。 □

---

1) 以下当 $\phi_+ = +\infty$（相应地，$\phi_- = -\infty$）时，涉及 ϕ_+（相应地，ϕ_-）的条件，就不需要了。

7.3.1 解存在的必要条件

我们要证明

定理 7.3 设条件 (7.35),(7.42) 成立. 为使 (7.36) 或(7.37) 存在一个解,必须有

(7.45) $$\int_\Gamma \phi_- d\Gamma \leqslant (f,1) \leqslant \int_\Gamma \phi_+ d\Gamma$$

注 7.5 (7.45) 自然等价于

$$|\Gamma|\phi_- \leqslant (f,1) \leqslant |\Gamma|\phi_+, \quad |\Gamma| = \Gamma \text{ 的测度}$$

条件(7.45)推广到情形(7.44)则变为形式

(7.45′) $$\int_\Gamma \phi_-(x)d\Gamma \leqslant (f,1) \leqslant \int_\Gamma \phi_+(x)d\Gamma \,\square$$

注 7.6 可以取 $f \in V'$ 满足

(7.46) $$(f,v) = \int_\Omega f_0 v dx + \int_\Gamma f_1 v d\Gamma$$

其中

$$f_0 \in L^2(\Omega),\ f_1 \in L^2(\Gamma)\ (\text{甚至} \in H^{-1/2}(\Gamma))$$

那么

$$(f,1) = \int_\Omega f_0\, dx + \int_\Gamma f_1 d\Gamma \,\square$$

注 7.7 在注 2.5 的结构中,我们有

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \lambda < h \\ 0, & \lambda \geqslant h \end{cases}$$

于是 $\phi_+ = 0$, $\phi_- = -\infty$, 且 (7.45) 归结为

(7.47) $$(f,1) \leqslant 0$$

若在(7.46)中取 $f_1 = 0$, 即得

$$\int_\Omega f_0\, dx \leqslant 0 \,\square$$

定理 7.3 的证明 取 $v = \lambda \in \mathbf{R}$, 于是

$$J(\lambda) = \Phi(\lambda) - \lambda(f,1) = \lambda\left[\lambda^{-1}\int_\Gamma \phi(\lambda)d\Gamma - (f,1)\right]$$

只有当(7.45)成立时, $J(\lambda)$ 当 $\lambda \to \pm\infty$ 时才有下界.

7.3.2 解存在的充分条件

定理 7.4 设条件(7.35),(7.42)成立。又假定(对应于(7.45)的严格条件)

$$\int_\Gamma \phi_- d\Gamma < (f,1) < \int_\Gamma \phi_+ d\Gamma \tag{7.48}$$

且

(7.49) 函数 ϕ 在使 $\phi(\lambda) \neq \infty$ 的集合上是 Lipschitz 的,则问题(7.36)或(7.37)存在一个解 u。

证明 对 $v \in H^1(\Omega)$,令

$$\bar{v} = |\Gamma|^{-1} \int_\Gamma v d\Gamma \tag{7.50}$$

$$\tilde{v} = v - \bar{v} \tag{7.51}$$

于是 $\int_\Gamma \tilde{v} d\Gamma = 0$,而(7.39)用于 $\tilde{v}$ 则得

$$a(\tilde{v},\tilde{v}) \geq \beta_2 \|\tilde{v}\|^2 \tag{7.52}$$

利用(7.51)得

$$J(v) = \frac{1}{2} a(\tilde{v},\tilde{v}) - (f,\tilde{v}) + \varphi(\bar{v} + \tilde{v}) - \bar{v}(f,1) \tag{7.53}$$

我们要证明(这对定理的证明是充分的)

$$J(v) \to +\infty, \text{ 当 } \|v\| \to \infty \text{ 时} \tag{7.54}$$

我们给出在下列情况下的证明,

$$\phi(\lambda) = \infty, \text{ 若 } \lambda < h, \ \phi_+ > 0 \text{ 有限} \tag{7.55}$$

ϕ_- 和 ϕ_+ 都有限时,证明类似。

根据(7.55),我们仅限于函数 $v \in K$,K 定义为

$$K = \{v \mid v(x) \geq h \quad \text{p.p. 于 } \Gamma \text{ 上}\} \tag{7.56}$$

注意,我们有

$$\bar{v} \geq h \tag{7.57}$$

由于 ϕ 是 Lipschitz 的,故存在常数 c 使

$$\phi(\bar{v} + \tilde{v}(x)) - \phi(\bar{v}) \geq -c|\tilde{v}(x)|$$

因此,当 c 表示不同常数时

(7.58) $$\psi(\bar{v}+\tilde{v})-\psi(\bar{v})\geqslant -c\|\tilde{v}\|$$

由(7.52)和(7.58)推出

(7.59) $$J(v)\geqslant \frac{1}{2}\beta_2\|\tilde{v}\|^2-c\|\tilde{v}\| + \bar{v}\left[\int_\Gamma(\phi(\bar{v})/\bar{v})d\Gamma-(f,1)\right]$$

但由(7.48)知,当 $\bar{v}$ 充分大时

$$\int_\Gamma(\phi(\bar{v})/\bar{v})d\Gamma-(f,1)>0$$

由此得 (7.54). □

7.33 在条件 (7.48) 之下的唯一性问题

首先,给出一个未必有唯一性的反例. 事实上, 取例 3.2 中的 ϕ (图 7), 那么

(7.60) $$\phi_+=g_2,\quad \phi_-=g_1$$

给定 f, 满足

(7.61) $$(f,1)=0$$

于是(7.48)成立

从而存在 Neumann 问题

(7.62) $$a(u,v)=(f,v),\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

的解 u, (7.62) 的所有解由 $u+c$ 给出,于是

$$Au=f,\ \partial u/\partial v_A=0,\quad \text{于 } \Gamma \text{ 上}$$

假定 u 在 Γ 上有界且设定义 ϕ 时涉及的常数 h_1 和 h_2 满足

(7.63) $$h_1\leqslant u(x)\leqslant h_2, x\in\Gamma$$

于是对所有常数 c, 只要 $w=u+c$ 满足

$$h_1\leqslant w(x)\leqslant h_2,\quad x\in\Gamma$$

总有

$$a(w,v-w)+\psi(v)-\psi(w)\geqslant(f,v-w)$$

于是问题(7.36)有无穷多个解. □

如此看来, 唯一性问题只能由考察每一特殊情况来解决. 这里我们给出一个唯一性的例子.

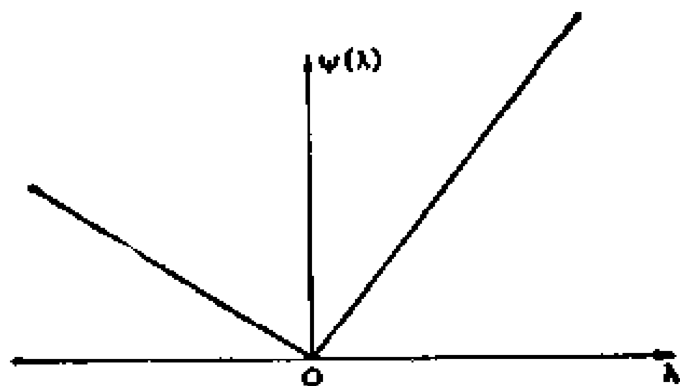


图 14

我们假定 ϕ 给定如下(图 14):

$$\phi(\lambda)=\begin{cases}g_1\lambda, & 若\ \lambda\leqslant 0\\ g_2\lambda, & 若\ \lambda>0\end{cases} \tag{7.64}$$

(7.60) 仍成立. 我们将要证明

定理 7.5 设(7.35)成立,而 ϕ 由(7.64)给定.又设(7.48)成立[1]且

$$(f,v)=\int_\Omega f_0 v\,dx,\quad f_0\in L^2(\Omega)^{2)}$$

则有唯一性.

证明[3] 设 u 和 u_* 是(7.36)的两个可能的解,在(7.36)(相应地,对 u_* 类似的不等方程)中令 $v=u_*$(相应地,$v=u$),相加得

$$a(u-u_*,u-u_*)\leqslant 0$$

于是

$$u-u_*=c^{4)}$$

设 u 和 $u+c$ 是两个可能的解. 必须证明 $c=0$. Γ 上的边界条件是(见 (3.69))

---

1) 即 $g_1|\Gamma|<(f,1)<g_2|\Gamma|$.
2) 仅为简化叙述.
3) 这个证明可以跳过.
4) 这是一般的,即不依赖于 ϕ 由 (7.64) 给定这一事实.

$$
(7.65)\qquad \begin{cases} u > 0 \Rightarrow \partial u/\partial \nu_A + g_2 = 0 \\ u = 0 \Rightarrow -g_2 < u/\partial \nu_A < -g_1 \\ u < 0 \Rightarrow \partial u/\partial \nu_A + g_1 = 0 \end{cases}
$$

$$
(7.66)\qquad \begin{cases} u + c > 0 \Rightarrow \partial u/\partial \nu_A + g_2 = 0 \\ u + c = 0 \Rightarrow -g_2 < \partial u/\partial \nu_A < -g_1 \\ u + c < 0 \Rightarrow \partial u/\partial \nu_A + g_1 = 0 \end{cases}
$$

首先验证,以下两个互斥情形要么不可能,要么导出 $c = 0$.

(7.67) $\partial u/\partial \nu_A + g_1 = 0$, p.p. 于 Γ 上(或 $\partial u/\partial \nu_A + g_2 = 0$, p.p. 于 Γ 上)

(7.68) $-g_2 < \partial u/\partial \nu_A < -g_1$, 于 $E \subset \Gamma$ 成立, $\mathrm{mes}(E) > 0$

事实上,由 $Au = f_0$ 和(7.67)借助 Green 公式可以推出

$$
(f_0, 1) = \int_\Gamma g_1 d\Gamma
$$

由(7.48),这是不可能的;若(7.68)成立, 那么由(7.65)和(7.66)得 $u = u + c = 0$, 于 E 上,故 $c = 0$.

剩下要考察的情形是[1]

$$
(7.69)\qquad \begin{cases} \partial u/\partial \nu_A = -g_1,\ 于\ \Gamma_1\ 上,\ \mathrm{mes}(\Gamma_1) > 0 \\ \partial u/\partial \nu_A = -g_2\ 于\ \Gamma_2\ 上,\ \mathrm{mes}(\Gamma_2) > 0 \\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2\ (两端可以相差一个零测集) \end{cases}
$$

必须指出,(7.69)导出 $c = 0$.

根据(7.65),(7.66),我们有

$$
u < 0,\ u + c < 0,\ 于\ \Gamma_1\ 上
$$

$$
u > 0,\ u + c > 0,\ 于\ \Gamma_2\ 上
$$

假定 $c > 0$ ($c < 0$ 时推理相同);于是

$$
(7.70)\qquad u < -c,\ 在\ \Gamma_1\ 上,\ u > 0,\ 在\ \Gamma_2\ 上
$$

但由 (7.69), $\partial u/\partial \nu_A \in L^2(\Gamma)$, 根据非齐次边值问题的理论 (见 Lions-Magenes[1][2]), 由此引出

$$
(7.71)\qquad u \in H^1(\Gamma)
$$

---

1) 这类似于最优控制中的 Bang Bang.

2) 假定 Γ 和系数 a_{ij} 充分光滑.

我们要指出[1]，(7.70)和(7.71)可导出 $c=0$。

设 P 是从 R 到 $[-c,0]$ 的投影算子；若 $\varphi\in L^2(\Gamma)$，则以 P_φ 表示函数 $x\to P((\varphi(x))$。映射 P 把 $H^1(\Gamma)$ 映到自身（且是一个压缩）。而由(7.70)，我们有

$$Pu=\{-c\ 于\ \Gamma_1,\ 0\ 于\ \Gamma_2\} \tag{7.72}$$

但因 $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$（精确到一个零测集），(7.72)蕴含 $c=0$；事实上，在广义函数意义下和在通常意义下取的 Pu 的一阶导数相同（例如见 Deny-Lions[1]）；根据(7.72)，Pu 的通常一阶导数 p.p. 为零，故于 Γ 上 p.p. 有 $Pu=$ 常数，从而 $c=0$。 □

7.3.4 (7.48) 的极限情形[2]

现在考虑(7.48)中有一个等号的情形，在定理 7.5 的结构之下，我们有

定理 7.6 设(7.35)成立，而 Φ 由(7.64)给定，又

$$(f,v)=\int_\Omega f_0 v\,dx,\quad f_0\in L^2(\Omega)$$

假设

$$(f,1)=\int_\Gamma \phi_-\,d\Gamma\ \ (=g_1|\Gamma|) \tag{7.73}$$

（相应地，

$$(f,1)=\int_\Gamma \phi_+\,d\Gamma(=g_2|\Gamma|)) \tag{7.74}$$

设 w_1（相应地 w_2）是下列问题的解[3]

$$Aw_1=f_0,\ \partial w_1/\partial\nu_A+g_1=0,\ \int_\Gamma w_1\,d\Gamma=0^{[4]} \tag{7.75}$$

（相应地

$$Aw_2=f_0,\ \partial w_2/\partial\nu_A+g_2=0,\ \int_\Gamma w_2\,d\Gamma=0 \tag{7.76}$$
）

---

1) 下述推理（是 J. Deny 告诉作者的）借自《Dirichlet 空间论》；见 A. Bearling 和 J. Deny[1]。

2) 本节可略过。

3) 由(7.73)（相应地(7.74)），有 w_1（相应地 w_2）的存在性。

4) 这是唯一确定 w_1 的条件，可代之以任何其它唯一确定 w_1 的线性条件。

问题(7.36)(或(7.37))有一个解，当且仅当

(7.77)　w_1（相应地 w_2）在 Γ 上有上界（相应地有下界）

若(7.77)成立，所有的解为

$$u = w_i + c \tag{7.78}$$

其中 c 是任意常数，满足

(7.79)　在 Γ 上 $w_1 + c \leqslant 0$（相应地 $w_2 + c \geqslant 0$）

注 7.8　因为 $f_0 \in L^2(\Omega)$ 且 $g_i \in H^{1/2}(\Gamma)$，故有 $w_i \in H^2(\Omega)$，于是 $w_i|_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma)$，并且我们已经证明(见 J. Peetre[1]) 这可导出

(7.80)　$w_i \in L^\infty(\Gamma)$，甚至 $w_i \in \mathscr{C}^0(\Gamma)$

只要

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2(n-1)} < 0, \text{ 即 } n < 4$$

于是，条件(7.77)总成立，只要 $n \leqslant 3$，即在所有实际情形。□

定理 7.6 的证明　在(7.73)之下证明定理。设 u 是一个可能的解，则有

$$Au = f_0 \tag{7.81}$$

且(见(7.65))　$-g_2 \leqslant \partial u/\partial \nu_A \leqslant g_1$. 而由(7.81)和 Green 公式推出

$$(f, 1) + \int_\Gamma (\partial u/\partial \nu_A) d\Gamma = 0$$

再结合(7.73)，必有

$$\partial u/\partial \nu_A + g_1 = 0 \text{ (p.p. 于 } \Gamma)$$

与(7.75)比较，必有

$$u = w_1 + c$$

只有当在 Γ 上 $u \leqslant 0$ 时，u 才真正是一个解(见(7.65))，即 $w_1 \leqslant -c$，对于一个适当的常数 c 成立. 由此得到所要的结果. □

8. 评　　述

为复习力学所需的文献已在正文中给出.

第 2 节中叙述的热学和半渗透壁问题由作者引进： Duvant-Lions[1],[2].

抛物情形的发展变分不等方程问题在 Lions-Stampacchia[1]中引进，而第 3 节所给的形式更一般且对解决第 2 节的问题是必需的。 作者试图使理论的介绍和第 5 节中问题的解答尽可能初等。对于理论的其它方面，见 H. Brezis[1],[2] 和 J. L. Lions[1].

第 4 节的复习对理解本书是必不可少的，除正文已指出的文献外，这里还应加上 Sobolev 的[1] 和 J. Nečas 的[1]

第 6 节中的方法是 Y. Hangazean[1] 的变形。 在 M. Schatzman[1] 中可找到其它结果.

这里 7.2 和 7.3 的结果第一次发表.

对于涉及到解的正则性的补充性质，见 H. Brezis [2].

第二章　热量控制问题

注意.阅读本章需了解第一章的1至5节.

对热量控制不太感兴趣的读者可以跳过这(简短的)一章.

1. 热 量 控 制

我们研究在边界为Γ被连续介质占据的一个开区域Ω的内部的温度场. 在本节所考虑的所有问题中，当t增加时某些点上温度的变化以一个确定的方式进行控制.

我们要区分两类控制：瞬时的和延迟的.

1.1 瞬时控制

1.1.1 边界温度的控制

设只控制边界温度$u(x, t)$. 函数u在区域内部满足热方程

(1.1)
$$\partial u/\partial t - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \ t \in]0, T[$$

或更一般地

(1.2)
$$\partial u/\partial t + Au = f$$

这里

(1.3)
$$A\varphi = -(a_{ij}(x)\varphi_{,j})_{,i}$$

其中的a_{ij}满足

(1.4)
$$\begin{cases} a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega), \ a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j \\ a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\xi_i\xi_i, \ \forall \xi_i \in R \end{cases}$$

此外给定初始温度：

(1.5)
$$u(x, 0) = u_0(x)$$

于是控制出现在边条件中.

给出两个例子

例 1.1（薄壁） Γ 上的温度被控制得增加，这是由于穿过器壁流入热量，这要求满足边条件

(1.6)
$$\begin{cases}\partial u(x,t)/\partial t>0\Longrightarrow\partial u(x,t)/\partial\nu_A=0^{1)}\\ \partial u(x,t)/\partial t=0\Longrightarrow\partial u(x,t)/\partial\nu_A\geqslant 0\end{cases}$$ □

例 1.2（厚壁） 若器壁是厚的，热的流动不再是瞬时的，控制要求满足边条件

(1.7)
$$\begin{cases}\partial u(x,t)/\partial t>0\Longrightarrow\partial u(x,t)/\partial\nu_A=0\\ \partial u(x,t)/\partial t\leqslant 0\Longrightarrow\partial u(x,t)/\partial\nu_A=-k\partial u(x,t)/\partial t\end{cases}$$

其中 k 是一个正数，它依赖器壁和控制系统。 □

注 1.1 温度控制的一个例子（第一章，2.3）导致边条件

(1.8)
$$\begin{cases}u>0\Longrightarrow\partial u/\partial\nu_A=0\\ u=0\Longrightarrow\partial u/\partial\nu_A\geqslant 0\end{cases}$$

跟 (1.6) 比较，同样涉及在不等式形式下的边条件，一个不能归结为另一个． □

注 1.2 如果在例 1.2 中，$k\to+\infty$，边条件 (1.7) 取极限就（形式上）给出边条件 (1.6)．事实上，在第 3 节中将看到，这可由下列事实验证：对例(1.2)的解 u_k，当 $k\to\infty$时（在一适当的拓扑下）收敛到对于例 1.1 的解． □

注 1.3 显然温度可控制得下降！

注 1.4 同样可以要求只在 Γ 的一部分上进行控制，设在 Γ_1 上控制，若 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，可得到例如下列边条件

(1.9)
$$u=0\ \text{若}\ x\in\Gamma_2,\ t>0$$

而在 Γ_1 上，有类似于 (1.6) 或(1.7)的条件，这要视 Γ_1 的薄厚而定． □

1.1.2 内部温度的控制

同样能设想一个控制系统，它由于热体密度为 g 的热量流入到 Ω 内而使得 Ω 内的温度增加．

---

1) $\partial\varphi/\partial\nu_A=a_{ij}(x)\varphi_{,j}\cos(n,x_i)$，$\Gamma$ 的法线 n 指向 Ω 的外部．

于是，例如

$$(1.10)\quad \begin{cases}\partial u(x,t)/\partial t > 0 \Longrightarrow g(x,t) = 0 \\ \partial u(x,t)/\partial t \leqslant 0 \Longrightarrow g(x,t) = -k\partial u(x,t)/\partial t,\ k > 0\end{cases}$$

温度场 u 是

$$(1.11)\qquad \partial u/\partial t + Au = f + g,\ \text{于}\ Q = \Omega_x]0, T[$$

的解，u 满足初条件(1.5)和边条件，例如

(1.12) $u(x,t) = \theta(x,t) =$ 在 $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ 上所要求的温度。

1.1.3 解的性质

物理上显然有，在情形(1.6)下，若 $f \geqslant 0$ 和 $u_0 \geqslant 0$，温度在 Q 内是正的。

事实上我们将在第 4 节证明这个性质(及这类的其它性质)。

1.1.4 其它控制

我们可以设想其它的一些控制。例如可以控制边界温度增加但不要太快，例如，由此得到条件

$$(1.13)\qquad \begin{cases}0 < \partial u(x,t)/\partial t < 1 \Longrightarrow \partial u(x,t)/\partial \nu_A = 0 \\ \partial u(x,t)/\partial t = 0 \Longrightarrow \partial u(x,t)/\partial \nu_A \geqslant 0 \\ \partial u(x,t)/\partial t = 1 \Longrightarrow \partial u(x,t)/\partial \nu_A \leqslant 0\end{cases}$$

我们在第 2 节给出一个包含所有这些(及其它)情形的一般表述。

1.2 延迟控制

现设控制装置只以离散方式控制边界温度，即只在时刻 $n\tau$ (n 为整数，τ：有限时间间隔)进行控制。若控制各观察时刻的温度增加，即导致边条件

$$(1.14)\qquad \begin{cases}u(x,t) - u(x,t-\tau) > 0 \Longrightarrow \partial u(x,t)/\partial \nu_A = 0 \\ u(x,t) - u(x,t-\tau) \leqslant 0 \Longrightarrow \partial u(x,t)/\partial \nu_A \\ \qquad = -k[u(x,t) - u(x,t-\tau)]\end{cases} \quad \square$$

注 1.5 “初条件”现应代以“厚初条件”，例如

$$(1.15)\qquad u(x,t) = u_0(x)\ (\text{或}\ u_0(x,t)),\ \text{若} -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad \square$$

注 1.6 自然可以设想在 Ω 内部的一些类似条件。

2. 控制问题的变分提法

2.1 记号

如第一章一样，令

(2.1) $$a(u,v)=\int_{\Omega}a_{ij}u_{,j}v_{,i}dx$$

将设

(2.2) $$a(u,v)=a(v,u)$$

如第一章 3.1 一样，引入函数 $\phi=\phi(\lambda)$ 和泛函

(2.3) $$\psi(v)=\int_{\Gamma}\phi(v)d\Gamma$$

或

(2.4) $$\psi(v)=\int_{\Omega}\phi(v)dx$$

2.2 变分不等方程

2.2.1 瞬时控制

我们要求一个函数 $u=u(x,t)$[1]，满足 $u'(t)\in H^1(\Omega)$ 和

(2.5) $$(u'(t),v-u'(t))+a(u(t),v-u'(t))+\psi(v)-\psi(u'(t))\geqslant(f(t),v-u'(t)),\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

及初条件

(2.6) $$u(0)=u_0$$

注 2.1 在第 3 节要确切阐明对函数 $t\to u(t)$ 所要求的性质.□

注 2.2 在 ψ 由(2.4)给定的情形，可用 $H_0^1(\Omega)$ 代 $H^1(\Omega)$(见第一章). 同样可用空间

(2.7) $$V=\{v\mid v\in H^1(\Omega),\ v=0\text{ 于 }\Gamma_2\}$$

代替 $H^1(\Omega)$(为解决注 1.4 中所考虑的问题).

注 2.3 比较(2.5)和第一章的(3.14)，可看出，出现在(3.14)中的 $v-u(t)$ 由 $v-u'(t)$ 取代，而出现在(3.14)中的 $\psi(v)-$

1) $u(t)=u(\cdot,t),\ u'(t)=\partial u(\cdot,t)/\partial t$.

$\psi(u(t))$ 由 $\psi(v)-\psi(u'(t))$ 取代。

例子在后面的 2.3 给出。 □

2.2.2 延迟控制

令

$$(2.8)\qquad Mu(t)=[u(t)-u(t-\tau)]/\tau$$

要找一个函数 u，满足 $u'(t)\in H^1(\Omega)$ 和

$$(2.9)\qquad (u'(t),v-Mu(t))+a(u(t),v-Mu(t))+\psi(v)-\psi(Mu(t))\geqslant(f(t),v-Mu(t)),\quad \forall v\in H^1(\Omega)$$

且

$$(2.10)\qquad u(t)=u_0(t),\quad -\tau\leqslant t\leqslant 0\quad □$$

我们有类似于注 2.2 中所指出的变形。

2.3 例

2.3.1 1 型函数 ϕ[1]

引入

$$(2.11)\qquad \Phi(\lambda)=d\phi(\lambda)/d\lambda$$

恰如第一章3.3.1，可以验证(2.5)(在情形(2.3)下)等价于

$$(2.12)\qquad (u'(t),v)+a(u(t),v)+\int_\Gamma\Phi(u'(t)vd\Gamma=(f(t),v),\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

或在情形(2.4)下等价于

$$(2.13)\qquad (u'(t),v)+a(u(t),v)+\int_\Omega\Phi(u'(t))vdx=(f(t),v),\ (\text{例如})\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\quad □$$

(2.12) 的解释完全重复第一章 3.3.1 的推理，可发现 (2.5)，(2.6)等价于

1) 见第一章第 3 节中的定义。

$$(2.14)\quad \begin{cases} \partial u(t)/\partial t + Au = f, \text{ 于 } Q = \Omega \times]0, T[\text{ 内} \\ \partial u/\partial \nu_A + \Phi(u') = 0, \text{ 于 } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ 上} \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega \end{cases}$$

(2.13)的解释

我们发现

$$(2.15)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au + \Phi(\partial u/\partial t) = f, \text{ 于 } Q \text{ 内} \\ u = 0, \text{ 于 } \Sigma \text{ 上} \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \Omega \end{cases} \quad \square$$

例 2.1 定义 ϕ 为

$$(2.16)\quad \phi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} k\lambda^2, & \text{当 } \lambda \leqslant 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \lambda \geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

于是(2.14)的边条件等价于

$$\begin{cases} \partial u/\partial t \geqslant 0 \Longrightarrow \partial u/\partial \nu_A = 0 \\ \partial u/\partial t \leqslant 0 \Longrightarrow \partial u/\partial \nu_A + k\partial u/\partial t = 0 \end{cases}$$

即条件(1.7). $\square$

延迟控制情形. 用第一章第 3 节的方法可以验证, 在情形(2.3)下,(2.9)等价于

$$(2.17)\quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_\Gamma \Phi(Mu(t))v d\Gamma = (f(t), v), \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

而在情形(2.4)下,(2.9)等价于

$$(2.18)\quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_\Omega \Phi(Mu(t))v dx = (f(t), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

举例来说,(2.17)和(2.10)的解释是

$$(2.19)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au = f, \ Q \text{ 内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}(t) + \Phi\left(\dfrac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau}\right) = 0, \ \Sigma \text{ 上} \\ u(x, t) = u_0(x, t), \ -\tau \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \quad \square$$

2.3.2 2 型函数 ψ

仍然引入 $\psi(\lambda)$ 的导数 $\Phi(\lambda)$（见第一章，3.3.2），它可以是多值的。

于是我们得到下列解释：在情形(2.3)下，问题等价于求

$$
(2.20)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au = f, & Q \text{ 内} \\ -\partial u(t)/\partial \nu_A \in \Phi(\partial u(t)/\partial t), & \Sigma \text{ 上} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}
$$

的解。在情形(2.4)下，问题等价于

$$
(2.21)\quad \begin{cases} -\partial u(t)/\partial t - Au(t) + f(t) \in \Phi(\partial u(t)/\partial t) \\ u = 0, \quad \Sigma \text{ 上} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}
$$
□

例 2.2 取第一章例 3.2 给定的 ψ。于是 $\Phi(\lambda)$ 由第一章(3.42)给定，(2.20)的边条件成为

$$
(2.22)\quad \begin{cases} -\partial u(t)/\partial \nu_A = g_1, & \text{若 } \partial u(t)/\partial t \leqslant h_1 \\ g_1 \leqslant -\partial u(t)/\partial \nu_A \leqslant 0, & \text{若 } \partial u(t)/\partial t = h_1 \\ \partial u(t)/\partial \nu_A = 0, & \text{若 } h_1 < \partial u(t)/\partial t < h_2 \\ 0 \leqslant -\partial u(t)/\partial \nu_A \leqslant g_2, & \text{若 } \partial u(t)/\partial t = h_2 \\ -\partial u(t)/\partial \nu_A = g_2, & \text{若 } \partial u(t)/\partial t > h_2 \end{cases}
$$
□

2.3.3 3 型函数 ψ

这时引入(如第一章(3.44))：

$$
(2.23)\qquad K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \psi(v) < \infty\}
$$

不等方程(2.5)等价于

$$
(2.24)\quad \begin{cases} u'(t) \in K \\ (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \psi(v) \\ \qquad - \psi(u'(t)) \geqslant (f(t), v - u'(t)), \quad \forall v \in K \end{cases}
$$

亦等价于(见第一章 3.3.3)

$$
(2.25)\quad \begin{cases} u'(t) \in K \\ (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) \\ \qquad + (\chi, v - u'(t)) \geqslant (f(t), \\ \qquad v - u'(t)), \ \forall v \in K \\ \chi \text{ 取自满足} \\ \Psi(v) - \Psi(u'(t)) - (\chi, v - u'(t)) \geqslant 0, \ \forall v \in K \\ \text{的元素 } \chi \text{ 的集合.} \end{cases}
$$

当 Ψ 由(2.3)给定时，问题等价于

$$
(2.26)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au = f, \ Q \text{ 内} \\ \partial u/\partial t \in K, \int_\Gamma (\partial u(t)/\partial t + \chi)(v - \partial u(t)/\partial t) d\Gamma \\ \qquad \geqslant 0, \ \forall v \in K \\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

例 2.3 取 ϕ 为

$$
(2.27)\quad \phi(\lambda) = \begin{cases} 0, & [h_1, h_2] \text{ 上} \\ +\infty, & \text{其它} \end{cases}
$$

则 $K = \{v \mid h_1 \leqslant v \leqslant h_2 \text{ 于 } \Gamma \text{ 上}\}$，可用下列方式明确(2.26)(见第一章(3.57))：

$$
(2.28)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au = f, \ Q \text{ 内} \\ h_1 \leqslant \partial u(t)/\partial t \leqslant h_2, \ \Sigma \text{ 上} \\ \partial u(t)/\partial t = h_1 \Longrightarrow \partial u(t)/\partial \nu_A \geqslant 0 \\ h_1 < \partial u(t)/\partial t < h_2 \Longrightarrow \partial u(t)/\partial \nu_A = 0 \\ \partial u(t)/\partial t = h_2 \Longrightarrow \partial u(t)/\partial \nu_A \leqslant 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \Omega \end{cases}
$$

特殊情形 1

$$h_1 = 0, \ h_2 = +\infty$$

此即相应条件(1.6)。

特殊情形 2

$$h_1 = 0, \ h_2 = 1;$$

此即对应条件(1.13). □

延迟控制情形

在情形(2.3)下,导致问题

$$
(2.29)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t + Au = f,\ Q\text{ 内} \\ \dfrac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} \in K \\ \displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} + \chi\right) \\ \qquad \times\left(v - \dfrac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau}\right) d\Gamma \geqslant 0,\ \forall v \in K \\ \chi\text{ 满足 } \varphi(v) - \varphi\left(\dfrac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau}\right) \\ \qquad -\left(\chi,\ v - \dfrac{u(t)-u(\tau)}{\tau}\right) \geqslant 0,\ \forall v \in K \\ u(t) = u_0(t),\ -\tau \leqslant t \leqslant 0 \quad \square \end{cases}
$$

2.4 指南

我们现在就来解瞬时控制问题(第 3 节),尔后给出解的若干性质(第 4 节).延迟控制情形将在第 5 节考察.

3. 瞬时控制问题的求解

3.1 主要结果的陈述

为明确计,取

$$(3.1)\qquad V = H^1(\Omega)$$

$a(u, v)$ 由(2.1)给定,它满足

$$(3.2)\qquad a(u, v) = a(v, u),\ \forall u, v \in V$$

$$(3.3)\qquad a(v, v) + c|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2,\ \alpha > 0,\ c > 0^{1)}$$

1) $|v| = v$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的范数, $\|v\| = v$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的范数.

给定一泛函 $v \to \Psi(v) = \int_\Gamma \phi(v) d\Gamma$，它有性质[1]

$$(3.4)\quad \left| \begin{array}{l} v \to \Psi(v) \text{ 从 } V \text{ 到 } \mathbf{R} \text{ 凸，对于 } V \text{ 的弱拓} \\ \text{扑下半连续，值域为 }]-\infty, +\infty], \end{array} \right.$$

存在 V 上的一族可微泛函 Ψ_i 满足

$$(3.5)\quad \left| \begin{array}{l} \forall v \in L^2(0, T; V) \text{ 有} \\ \int_0^T \Psi_i(v)\, dt \to \int_0^T \Psi(v) dt,\ i \to \infty \end{array} \right.$$

$$(3.6)\quad \left| \begin{array}{l} \text{存在 } V \text{ 中的有界序列 } \varphi_i \text{ 满足} \\ \Psi'(\varphi_i) = 0,\ \forall i\ (\text{或 } \Phi_i(\varphi_i) = 0,\ \text{若 } \Phi_i = \Psi_i') \end{array} \right.$$

$$(3.7)\quad \left| \begin{array}{l} \text{若 } v_i \to v \text{ 在 } L^\infty(0T; V) \text{ 弱}^* \text{且 } v_i' \to v' \text{ 在 } L^2(0, T; H) \\ \text{中弱 } (H = L^2(\Omega))\text{，又 } \int_0^T \Psi_i(v_i) \leqslant \text{常数，则} \\ \qquad \liminf \int_0^T \Psi_i(v_i) dt \geqslant \int_0^T \Psi(v) dt \quad \square \end{array} \right.$$

注 3.1 在第一章 5.3 已经看到上述条件在所有应用中均满足。 □

对数据 f 和 u_0 加上相当强的条件，将得到"强"解的存在性定理。

假定

$$(3.8)\qquad f, f' \in L^2(0, T; H)$$

$$(3.9)\quad \left| \begin{array}{l} u_0 \text{ 在 } V \text{ 中给定，满足 } Au_0 \in L^2(\Omega)\text{；可以找到序列} \\ u_{0i} \in V \text{ 满足 } Au_{0i} \in L^2(\Omega),\ u_{0i} \to u_0 \text{ 在 } V \text{ 中，} Au_{0i} \to Au_0. \\ \text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中，每一 } u_{0i} \text{ 满足} \\ f(0) - Au_{0i} \in H^1(\Omega),\ \partial u_{0i}/\partial \nu_A + \Phi_i(f(0) - Au_{0i}) = 0, \\ \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \\ f(0) - Au_{0i} \to f(0) - Au_0,\ \text{在 } H^1(\Omega) \text{ 中} \end{array} \right.$$

我们有下述结果：

定理 3.1 设条件(3.1)—(3.9)成立，则存在唯一的函数 u，满

---

1) 它们类似于第一章的(5.2)，(5.3)，(5.4)，(5.5)，仅在第一章(5.5)和(3.7)之间有微小的技术性差别，从应用观点来看差别不重要。

足

(3.10) $u \in L^\infty(0,T;V),\ u' \in L^\infty(0,T;V),\ u'' \in L^2(0,T;H)$

(3.11) $$\begin{cases}(u'(t), v-u'(t)) + a(u(t), v-u'(t)) + \varPsi(v) \\ -\varPsi(u'(t)) \geqslant (f(t), v-u'(t)),\ \forall v \in V (\text{p. p. 对 } t)\end{cases}$$

(3.12) $$u(0) = u_0$$

定理 3.2 (逼近定理) 条件同定理 3.1. 设 u_j 是下列问题的解:

$(3.10)_j$ $u_j \in L^\infty(0,T;V),\ u_j' \in L^\infty(0,T;V),\ u_j'' \in L^2(0,T;H)$

$(3.11)_j$ $$(u_j'(t), v-u_j'(t)) + a(u_j(t), v-u_j'(t)) + \varPsi_j(v) - \varPsi_j(u_j'(t)) \geqslant (f(t), v-u_j'(t)),\quad \forall v \in V$$

$(3.12)_j$ $$u_j(0) = u_{0j}$$

用 u 表示定理 3.1 提供的解,则当 $j \to \infty$ 时我们有

(3.13) $u_j \to u,\ u_j' \to u'$, 在 $L^\infty(0,T;V)$ 中弱*

(3.14) $u_j'' \to u''$, 在 $L^2(0,T;H)$ 中弱

注 3.2 由于 $\varPsi_j$ 是可微的, $(3.11)_j$ 等价于方程

(3.15) $$(u_j'(t), v) + a(u_j(t), v) + (\Phi_j(u_j'(t)), v)^{1)} = (f(t), v) \quad \square$$

注 3.3 定理 3.2 验证了(并精确化了)注 1.2. □

注 3.4 第一章 5.4 所作的考虑亦适用于此. □

3.2 定理 3.1(和 3.2)中唯一性的证明

唯一性的证明不过是第一章 5.5 所给证明的不同说法.

设 u 和 u_* 是(3.11)两个可能的解;在(3.11)中取 $v = u_*'(t)$,在类似于 (3.11) 的关于 u_* 的不等方程中取 $v = u'(t)$, 把所得的两个不等式相加,令 $w = u - u_*$, 即得

$$-|w'(t)|^2 - a(w(t), w'(t)) \geqslant 0$$

---

1) 注意这里 $(\Phi_j(u_j'(t)), v) = \int_\Gamma \Phi_j(v_j'(t)) v\, d\Gamma$, 以下对类似的项仿此. ——译者注

由于 $a(u,v)=a(v,u)\ \forall u,\ v\in V$，因此得

$$(3.16)\qquad |w'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(w(t),w(t))\leqslant 0$$

通常令

$$(3.17)\qquad a(\varphi,\varphi)=a(\varphi)$$

由于 $w(0)=0$，从(3.16)推出

$$(3.18)\qquad a(w(t))+2\int_0^t|w'(\sigma)|^2d\sigma\leqslant 0$$

考虑到(3.3)[1]，从(3.18)得到

$$(3.19)\qquad \alpha\|w(t)\|^2+2\int_0^t|w'(\sigma)|^2d\sigma\leqslant c|w(t)|^2$$

$$=c\left|\int_0^t|w'(\sigma)d\sigma\right|^2\leqslant ct\int_0^t|w'(\sigma)|^2d\sigma$$

由此在 $[0,t_0]$ 上 $w(t)=0$，$t_0=\frac{2}{c}$；从 t_0 到 t 积分(3.16)，可得在 $[t_0,2t_0]$ 上 $w(t)=0$，如此继续做下去即得唯一性。 □

3.3 定理 3.1 和 3.2 的证明

证明的路线如下

1) (3.15)的 "Galerkin 逼近"的求解；

2) 求解(3.15)和 $u_j(0)=u_{0j}$；

3) u_j 的先验估计；

4) 定理结果的证明.

3.3.1 (3.15)的 Galerkin 逼近的求解

引进 V 的一组基 $w_1,\cdots,w_m,\cdots$，满足

(3.20) u_{0j}，$f(0)-Au_{0j}$，$\varphi_j\in w_1$，w_2 和 w_3 张成的空间 $[w_1,w_2,w_3]$.

(3.15)的 "Galerkin 逼近" $u_m(t)$ 由下列问题的解"定义"：

$$(3.21)\qquad (u_m'(t),w_k)+a(u_m(t),w_k)+(\Phi_j(u_m'(t)),w_k)$$

$$=(f(t),w_k),\ 1\leqslant k\leqslant m$$

1) 事实上，在我们考察过的应用中，还有 $a(v,v)\geqslant 0$，以下证明是显然的.

(3.22) $u_m(t)\in[w_1,\cdots,w_m]=w_1,\cdots,w_m$ 所张成的空间

(3.23) $u_m(0)=u_{0i}$ (由于(3.20),只要 $m\geqslant 3$,这是可能的)

但由于出现了项 $(\Phi_i(u'_m(t)),w_k)$,故(非线性)微分方程组可能是奇异的。于是必须验证这种情况不会出现,而(3.21),(3.22),(3.23)在一个区间 $[0,t_m]$ 内唯一地定义了 $u_m(t)$,由先验估计,$t_m=T$。

为此有几种可能的方法,其中之一是用一 t 的二阶方程组"逼近"(3.21);对 $\varepsilon>0$,求 $\phi_{\varepsilon m}=\phi_\varepsilon(t)$,满足

(3.24)
$$\phi_\varepsilon(t)\in[w_1,\cdots,w_m]$$

(3.25)
$$\varepsilon(\phi''_\varepsilon(t),w_k)+(\phi'_\varepsilon(t),w_k)+a(\phi_\varepsilon(t),w_k)+(\Phi_i(\phi'_\varepsilon(t)),w_k)=(f(t),w_k),\ 1\leqslant k\leqslant m$$

(3.26)
$$\begin{cases}\phi_\varepsilon(0)=u_{0i}\\ \phi'_\varepsilon(0)=u_{1i}=f(0)-Au_{0i}\end{cases}$$

由于(3.20),只要 $m\geqslant 3$ 条件(3.26)是可能满足的,我们注意在(3.21)中取 $t=0$ 便得

$$(u'_m(0),w_k)+(\Phi_i(u'_m(0)),w_k)=(f(0),w_k)-a(u_{0i},w_k)$$

(3.27)
$$=(f(0)-Au_{0i},w_k)-\int_\Gamma\frac{\partial u_{0i}}{\partial\nu_A}w_k d\Gamma$$

$$=(\text{根据}(3.9))(f(0)-Au_{0i},w_k)+\int_\Gamma\Phi_i(f(0)-Au_{0i})w_k d\Gamma$$

由此得 $u'_m(0)=f(0)-Au_{0i}$ 是一个解;但若把(3.27)看作关于 $u'_m(0)$ 的方程,它只有唯一解;事实上,若 φ 和 ϕ 是两个可能的解,相应的两式相减即得

$$(\varphi-\phi,w_k)+(\Phi_i(\varphi)-\Phi_i(\phi),w_k)=0,\ 1\leqslant k\leqslant m$$

由于 φ 和 ϕ 都 $\in[w_1,\cdots,w_m]$,由上式即推出

(3.28)
$$|\varphi-\phi|^2+(\Phi_i(\varphi)-\Phi_i(\phi),\varphi-\phi)=0$$

由于 Φ_i 是单调的,从(3.28)推出 $\varphi=\phi$,于是

(3.29)
$$u'_m(0)=f(0)-Au_{0i}$$

这就验证了(3.26)中的第二个条件。

微分方程组(3.24)，(3.25)，(3.26)是非奇异的，于是在一个区间 $[0, t_m]$ 内唯一地定义了 ϕ_ε。

ϕ_ε 的先验估计(第1部分)

考虑到(3.20)，由(3.25)(还注意到 $\Phi_i(\varphi_i)=0$) 推出:

(3.30) $$\begin{aligned}\varepsilon(\phi_\varepsilon''(t), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j) &+ (\phi_\varepsilon'(t), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j) \\ &+ a(\phi_\varepsilon(t), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j) + (\Phi_j(\phi_\varepsilon'(t)) \\ &- \Phi_j(\varphi_j), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j) = (f(t), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j)\end{aligned}$$

由于 Φ_j 是单调的，从此式即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d}{dt}|\phi_\varepsilon'(t)|^2 &+ |\phi_\varepsilon'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\phi_\varepsilon(t)) \\ &\leqslant \varepsilon(\phi_\varepsilon''(t), \varphi_j) + (\phi_\varepsilon'(t), \varphi_j) + a(\phi_\varepsilon(t), \varphi_j) \\ &\quad + (f(t), \phi_\varepsilon'(t)-\varphi_j)\end{aligned}$$

对 t 积分，即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon|\phi_\varepsilon'(t)|^2 &+ \frac{1}{2}a(\phi_\varepsilon(t)) + \int_0^t|\phi_\varepsilon'(\sigma)|^2d\sigma \\ &\leqslant \varepsilon(\phi_\varepsilon'(t), \varphi_j) - \varepsilon(u_{1j}, \varphi_j) + \int_0^t(\phi_\varepsilon'(\sigma), \varphi_j)d\sigma \\ &\quad + \int_0^t a(\phi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j)d\sigma \\ &\quad + \int_0^t(f(\sigma), \varphi_\varepsilon'(\sigma)-\phi_j)d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon|u_{1j}|^2 + \frac{1}{2}a(u_{0j}) \\ &\leqslant \frac{1}{4}\varepsilon|\phi_\varepsilon'(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t|\phi_\varepsilon'(\sigma)|^2d\sigma \\ &\quad + \int_0^t a(\phi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j)d\sigma \\ &\quad + c\left(1+\int_0^t|f(\sigma)|^2d\sigma\right)^{1)}\end{aligned}$$

由此

1) c 表示不同的常数.

(3.31) $$\frac{1}{2}\varepsilon|\psi_\varepsilon'(t)|^2 + a(\psi_\varepsilon(t)) + \int_0^t |\psi_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma$$
$$\leqslant c\left(1 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma\right) + 2\int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) d\sigma.$$

为了简化下面的证明，假设(这不是本质的)

(3.32) $$a(v, v) = a(v) \geqslant 0.$$

于是

$$a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) \leqslant \frac{1}{4} a(\psi_\varepsilon(\sigma)) + a(\varphi_j)$$

而(3.31)给出

(3.33) $$\frac{1}{2}\varepsilon|\psi_\varepsilon'(t)|^2 + a(\psi_\varepsilon(t)) + \int_0^t |\psi_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma$$
$$\leqslant c\left(1 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma\right) + \frac{1}{2}\int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma)) d\sigma$$

特别有

$$a(\psi_\varepsilon(t)) \leqslant c + \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma)) d\sigma$$

由 Gronwall 不等式得

(3.34) $$a(\psi_\varepsilon(t)) \leqslant c$$

在(3.33)中利用(3.34)，便推出

(3.35) $$\varepsilon|\psi_\varepsilon'(t)|^2 \leqslant c$$

(3.36) $$\int_0^T |\psi_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant c$$

由 (3.36) 和 $\psi_\varepsilon(t) = u_{0j} + \int_0^t \psi_\varepsilon'(\sigma) d\sigma$ 推知

$$|\psi_\varepsilon(t)| \leqslant c$$

此式结合(3.34)和(3.3)得

(3.37) $$\|\psi_\varepsilon(t)\| \leqslant c \quad \square$$

注 3.5 基本的事实是上面引入的常数 c 不依赖于 ε, m 和 j.

ψ_ε 的先验估计(第 2 部分)

注意，u_{1j} 的选取使得从(3.25)得出

$$(3.38)\qquad \phi_\epsilon''(0)=0$$

对 t 微分(3.25)——除非假定函数 Φ_j 是 Lipschitz 连续，这个求导是形式的——取差商代替求导数，下述计算就合理了．由此得

$$(3.39)\qquad \epsilon(\phi_\epsilon''', w_k)+(\phi_\epsilon'', w_k)+a(\phi_\epsilon', w_k)+((\Phi(\phi_\epsilon'))', w_k) = (f', w_k)$$

由此推出

$$(3.40)\qquad \epsilon(\phi_\epsilon''', \phi_\epsilon'')+|\phi_\epsilon''|^2+a(\phi_\epsilon', \phi_\epsilon'')+((\phi(\phi_\epsilon'))', \phi_\epsilon'') = (f', \phi_\epsilon'')$$

由于 Φ_j 是单调的，故有(见第一章(5.41))

$$(\Phi_j(\phi_\epsilon'(t))', \phi_\epsilon''(t))\geqslant 0$$

于是由(3.40)得出，

$$(3.41)\qquad \frac{\epsilon}{2}\frac{d}{dt}|\phi_\epsilon''(t)|^2+|\phi_\epsilon''(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\phi_\epsilon'(t))\leqslant (f'(t), \phi_\epsilon''(t))$$

考虑到(3.38)，由此得

$$(3.42)\qquad \frac{1}{2}\epsilon|\phi_\epsilon''(t)|^2+\int_0^t|\phi_\epsilon''(\sigma)|^2d\sigma+\frac{1}{2}a(\phi_\epsilon'(t)) \leqslant \frac{1}{2}a(u_{1j})+\int_0^t|f'(\sigma)||\phi_\epsilon''(\sigma)|d\sigma$$

根据(3.9)，$a(u_{1j})\leqslant c$，于是由(3.42)得出

$$(3.43)\qquad \epsilon|\phi_\epsilon''(t)|^2+\int_0^t|\phi_\epsilon''(\sigma)|^2d\sigma+a(\phi_\epsilon'(t)) \leqslant c+\int_0^t|f'(\sigma)|^2d\sigma$$

因此，

$$(3.44)\qquad \epsilon|\phi_\epsilon''(t)|^2\leqslant c$$

$$(3.45)\qquad \int_0^t|\phi_\epsilon''(\sigma)|^2d\sigma\leqslant c$$

$$(3.46)\qquad \|\phi_\epsilon'(t)\|\leqslant c$$

c 表示不依赖于 ε, m, j 的常数。□

关于 ε 过渡到极限

根据已经得到的先验估计及由(3.46)导出的

(3.47) $$\|\Phi_j(\phi'_\varepsilon(t))\|_* \leqslant c$$

可取一个子序列 ϕ_ε，满足当 $\varepsilon \to 0$ 时：

(3.48) $$\begin{cases} \phi_\varepsilon \to u_m,\ \phi'_\varepsilon \to u'_m \text{ 在 } L^\infty(0, T; V) \text{ 中弱}^* \\ \phi''_\varepsilon \to u''_m, \text{ 在 } L^2(0,T; H) \text{ 中弱} \end{cases}$$

(3.49) $$\Phi_j(\phi'_\varepsilon) \to \chi, \text{ 在 } L^\infty(0, T; V') \text{ 中弱}^*$$

在(3.25)中对固定的 k，令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，由(3.44)知在 $L^\infty(0, T)$ 中

$$\varepsilon(\phi''_k, w_k) \to 0$$

我们得到

(3.50) $$(u'_m, w_k) + a(u_m, w_k) + (\chi, w_k) = (f, w_k),$$
$$1 \leqslant k \leqslant m$$

由于 $\phi_\varepsilon(0) = u_{0j} \to u_m(0)$ 在 V 中弱，我们有

$$u_m(0) = u_{0j}$$

于是只要证明

(3.51) $$\chi = \Phi_j(u'_m)$$

我们就解决了(3.21),(3.22),(3.23)。为此利用"单调论证"。设 φ 是一个 $L^2(0, T; V)$ 中的函数，它在$[w_1, \cdots, w_m]$中取值。令

(3.52) $$X_\varepsilon = \int_0^T (\Phi_j(\phi'_\varepsilon) - \Phi_j(\varphi), \phi'_\varepsilon - \varphi)dt$$

由 Φ_j 的单调性知 $X_\varepsilon \geqslant 0$。利用(3.25)得

(3.53) $$X_\varepsilon = -\varepsilon\int_0^T (\phi''_\varepsilon, \phi'_\varepsilon)dt - \int_0^T |\phi'_\varepsilon|^2 dt - \int_0^T a(\phi_\varepsilon, \phi'_\varepsilon)dt$$
$$+ \int_0^T (f, \phi'_\varepsilon)dt - \int_0^T (\Phi_j(\phi'_\varepsilon), \varphi)dt$$
$$- \int_0^T (\Phi_j(\varphi), \phi'_\varepsilon - \varphi)dt$$

而
$$\varepsilon\int_0^T(\psi_\varepsilon'',\psi_\varepsilon')dt\to 0,$$
$$\limsup\left(-\int_0^T|\psi_\varepsilon'|^2dt\right)\leqslant-\int_0^T|u_m'|^2dt$$
$$\limsup\left[-\int_0^T a(\psi_\varepsilon,\psi_\varepsilon')dt\right]$$
$$=\limsup\left[-\frac{1}{2}a(\psi_\varepsilon(T))+\frac{1}{2}a(u_{0i})\right]$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}a(u_m(T))+\frac{1}{2}a(u_{0i})$$
$$=-\int_0^T a(u_m,u_m')dt$$
由此
$$0\leqslant\limsup X_\varepsilon\leqslant-\int_0^T[|u_m'(t)|^2+a(u_m,u_m')-(f,u_m')]dt-\int_0^T(\chi,\varphi)dt-\int_0^T(\Phi_j(\varphi),u_m'-\varphi)dt \tag{3.54}$$
而由(3.50)有
$$-\int_0^T[|u_m'(t)|^2+a(u_m,u_m')-(f,u_m')]dt=\int_0^T(\chi,u_m')dt$$
(3.54)便给出
$$\int_0^T(\chi-\Phi_j(\varphi),u_m'-\varphi)dt\geqslant 0 \tag{3.55}$$
在上式中取 $\varphi=u_m'-\lambda\psi,\lambda>0,\psi\in L^2(0,T;V),\varphi$ 在$[w_1,\cdots,w_m]$ 中取值，除以 λ 得:
$$\int_0^T(\chi-\Phi_j(u_m'-\lambda\psi),\psi)dt\geqslant 0$$
令 $\lambda\to 0$ 得
$$\int_0^T(\chi-\Phi_j(u_m'),\psi)dt\geqslant 0$$
由此知(3.51)成立。□

注意，由估计(3.37)，(3.45)和(3.46)推出

$$
(3.56)\qquad \left|\begin{array}{l} \|u_m(t)\| + \|u'_m\| \leqslant c \\ \int_0^T |u''_m(t)|^2 dt \leqslant c \end{array}\right.
$$

c 是不依赖于 m 和 j 的常数。 □

3.3.2 (3.15)的求解和对 u_j 的先验估计

根据(3.56)可取 $u_m = u_{jm}$ 的子序列 u_μ，满足

$$
(3.57)\qquad \left|\begin{array}{l} u_\mu \to u_j,\ u'_\mu \to u'_j \text{ 在 } L^\infty(0,T;V) \text{ 中弱}^* \\ u''_\mu \to u''_j,\ \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中弱} \end{array}\right.
$$

且有

$$
(3.58)\qquad \Phi_j(u'_\mu) \to \chi_j,\ \text{在 } L^\infty(0,T;V') \text{ 中弱}^*
$$

此外，根据(3.56)有

$$
(3.59)\qquad \|u_j(t)\| + \|u'_j(t)\| \leqslant c,\ \int_0^T |u''_j(t)|^2 dt \leqslant c
$$

在(3.21)中令 $m = \mu \to \infty$ 取极限(k固定)，我们发现

$$
(u'_j, w_k) + a(u_j, w_k) + (\chi_j, w_k) = (f, w_k)
$$

这对任意 k 成立，于是

$$
(3.60)\qquad (u'_j, v) + a(u_j, v) + (\chi_j, v) = (f, v),\ \forall v \in V
$$

严格按(3.51)的方式可验证

$$
(3.61)\qquad \chi_j = \Phi_j(u'_j)
$$

$\left(\text{只要引入 } y_\mu = \int_0^T (\Phi_j(u'_\mu) - \Phi_j(\varphi), u'_\mu - \varphi)dt \geqslant 0,\ \varphi \in L^2(0, T;V)\right)$于是就构造了(3.15)满足 (3.12)$_j$ 的解，并有估计(3.59)。此外(作为(3.26)第二个条件的推论)有

$$
(3.62)\qquad u'_j(0) = f(0) - Au_{0j} \quad □
$$

3.3.3 定理结果的证明

根据(3.59)可取一子序列 u_j，使(3.13)，(3.14)成立。

由于(3.15)等价于 (3.11)$_j$，剩下要证明 u 是(3.11)的解(根据解的唯一性，就不必取子序列了)。

在(3.11)$_j$中固定 $v = v_0$，v_0 满足 $\varphi(v_0) < \infty$，由于 $\varphi_j(v_0) \to$

$\Psi(v_0)$，我们有 $\Psi_i(v_0) \leqslant c$，从 $(3.11)_i$ 推出

$$\int_0^T \Psi_i(u_i'(t))dt \leqslant C \tag{3.63}$$

于是对 $v_i = u_i'$，$v = u'$ 利用(3.7)，即得

$$\liminf \int_0^T \Psi_i(u_i')dt \geqslant \int_0^T \Psi(u')dt \tag{3.64}$$

在 $(3.11)_i$ 中取 $v = v(t)$，$v \in L^2(0, T; V)$。于是有

$$\int_0^T [(u_i', v) + a(u_i, v) + \Psi_i(v) - (f, v - u_i')]dt$$

$$\geqslant \int_0^T [|u_i'|^2 + a(u_i, u_i') + \Psi_i(u_i')]dt$$

$$= \int_0^T |u_i'|^2 dt + \frac{1}{2} a(u_i(T)) - \frac{1}{2} a(u_{0i})$$

$$+ \int_0^T \Psi_i(u_i')dt$$

特别利用(3.64)，由上式即可推出

$$\int_0^T [(u', v) + a(u, v) + \Psi(v) - (f, v - u')]dt$$

$$\geqslant \int_0^T |u'|^2 dt + \frac{1}{2} a(u(T)) - \frac{1}{2} a(u_0)$$

$$+ \int_0^T \Psi(u')dt$$

由此得

$$\int_0^T [(u', v - u') + a(u, v - u') + \Psi(v) - \Psi(u') - (f, v - u')]dt \geqslant 0, \ \forall v \in L^2(0, T; V) \tag{3.65}$$

但严格重复第一章(5.59)后面的推理，即可验证(3.65)蕴涵（且等价于）(3.11)。□

注 3.6 由(3.62)推出，定理 3.1 的解满足

$$u'(0) = f(0) - Au_0 \quad \square \tag{3.66}$$

4. 薄壁瞬时控制问题解的一个性质

现考虑例 1.1（见例 2.3，特殊情形 1）的问题由定理 3.1 提供的解 u，这里

(4.1) $$\phi(\lambda)=\begin{cases}+\infty, & \text{若 } \lambda<0\\ 0, & \text{若 } \lambda\geqslant 0\end{cases}$$

(4.2) $$\Psi(v)=\int_\Gamma \phi(v)d\Gamma$$

我们要证明

定理 4.1 设定理 3.1 的条件成立，其中的 Ψ 由 (4.1),(4.2)定义，假定 f 和 u_0 满足

(4.3) $$\partial f/\partial t\geqslant 0, \text{ p. p. 于 } Q$$

(4.4) $$f(0)-Au_0\geqslant 0, \text{ p. p. 于 } \Omega$$

(4.5) $$\partial u_0/\partial \nu_A=0$$

则相应问题的解 u 满足

(4.6) $$\partial u/\partial t\geqslant 0, \text{ p. p. 于 } Q$$

证明.

1）取

(4.7) $$\phi_j(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{2}j\lambda^2, & \lambda\leqslant 0\\ 0 & \lambda\geqslant 0\end{cases}$$

(4.8) $$\Psi_j(v)=\int_\Gamma \phi_j(v)d\Gamma$$

于是

(4.9) $$(\Phi_j(u),v)=\int_\Gamma \Phi_j(u(x))v(x)d\Gamma$$

其中

(4.10) $$\Phi_j(\lambda)=\begin{cases}j\lambda, & \text{若 } \lambda\leqslant 0\\ 0, & \text{若 } a\geqslant 0.\end{cases}$$

再在(3.9)中取

(4.11) $$u_{0j} = u_0$$

定理 3.2 的条件满足，因为，特别有

$$\partial u_0/\partial \nu_A + \Phi_j(f(0) - Au_0) = \partial u_0/\partial \nu_A \text{ (因为 } f(0) - Au_0 \geqslant 0) = 0 \text{ (根据(4.5))}$$

于是只要证明了

(4.12) $$\partial u_j/\partial t \geqslant 0, \quad \text{p. p. 于 } Q$$

就可以应用定理 3.2 并得到(4.6)，这一事实本身亦是有意义的.

2）因函数 Φ_j Lipschitz 连续，故可以对 t 求方程(3.15)的微分（$((\Phi_j(u), v)$ 由(4.9)给出）. 于是

(4.13) $$(u_j'', v) + a(u_j', v) + ((\Phi_j(u_j))', v) = (f', v)$$

在(4.13)中取 $v = (u_j')^-$；注意到

$$(u_j'', (u_j')^-) = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u_j')^-(u_j')^- dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_j'^-(t)^2|$$

$$a(u_j', u_j'^-) = -a(u_j'^-, u_j'^-)$$

从(4.13)即可推出

(4.14) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_j'^-(t)|^2 + a(u_j'^-) - ((\Phi_j(u_j))', u_j'^-) + (f', (u_j')^-) = 0$$

而由(4.9)，(4.10)，我们有

$$-((\Phi_j(u_j'))', u_j'^-) = -\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t}(ju_j') \cdot (u_j')^- d\Gamma$$

（因只在使 $u_j' \leqslant 0$ 处积分）

$$= j\int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t}(u_j')^-\right)(u_j'^-) d\Gamma$$

$$= \frac{j}{2}\frac{d}{dt}\int_\Gamma ((u_j')^-)^2 d\Gamma$$

于是(4.14)写为

$$(4.15)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_i'^-(t)|^2 + a(u_i'^-(t)) + \frac{j}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Gamma (u_i'^-)^2 d\Gamma\right) + (f'(t), u_i'(t)^-) = 0$$

根据 (4.3)，$(f'(t), u_i'(t)^-) \geqslant 0$，于是 (4.15) 给出(由 (3.62)，$u_i'(0) = f(0) - Au_{0i} =$ (由(4.11)$f(0) - Au_0 \geqslant 0$，故 $u_i'(0)^- = 0$)

$$(4.16)\quad \frac{1}{2}|u_i'^-(t)|^2 + \int_0^t a(u_i'^-(\sigma))d\sigma + \frac{1}{2}j\int_\Gamma (u_i'^-(t))^2 d\Gamma \leqslant 0$$

由此

$$u_i'^- = 0$$

此即(4.12)。 □

5. 关于延迟控制的特殊结果[1]

5.1 一个结果的陈述

延迟控制的一般问题还远没有完全解决。我们这里要给出一个特殊结果，它需要对泛函 Ψ 附加很强的条件，例如 Ψ 可给定为

$$(5.1)\quad \Psi(v) = \int_\Gamma \phi(v(x))\, d\Gamma;$$

我们假定

(5.2) 函数 ϕ 可微[2]其导数 $d\phi/dx = \Phi$ 是 Lipschitz 连续的。

这时不等方程(2.9)实际上等价于方程：

$$(5.3)\quad (u', v) + a(u, v) + (\Phi(Mu), v) = (f, v),\quad \forall v \in H^1(\Omega) = V$$

其中

$$(5.4)\quad (\Phi(w), v) = \int_\Gamma \Phi(w(x))v(x)d\Gamma$$

---

1) 本节可跳过。

2) 按第一章 3.3 的术语是 1 型的。

于是涉及的是一个带延迟的非线性抛物型偏微分方程[1]的问题。

我们要证明

定理 5.1 假定形式 $a(u,v)$ 在下述意义下是强制的，

(5.5) $$a(v,v)+c_3|v|^2\geqslant\alpha\|v\|^2,\ \alpha>0$$

a 不必是对称的[2]。假定(5.2)成立。给定 f 和 u_0 满足

(5.6) $$f\in L^2(0,T;V')$$

(5.7) $$u_0\in H^1(\Omega)$$

则存在唯一的函数 u 满足

(5.8) $$\begin{cases}u\in L^2(0,T;V)\\ \partial u/\partial t\in L^2(0,T;V')\end{cases}$$

(5.9) $$u(t)=u_0,\ 若\ -\tau\leqslant t\leqslant 0$$

并且(5.3)对 $t\in(0,T)$ 几乎处处成立。

5.2 定理 5.1 中存在性的证明

仍取 V 的一组"基" $w_1,\cdots,w_m,\cdots$，假定

(5.10) $$w_1=u_0\ (若\ u_0\neq 0)$$

定义 $u_m(t)$ 如下：

(5.11) $u_m(t)\in[w_1,\cdots,w_m]$(由 $w_1,\cdots w_m$ 所张成的空间)

(5.12) $$(u_m'(t),w_k)+a(u_m(t),w_k)+(\Phi(Mu_m(t)),w_k)=(f(t),w_k),\ 1\leqslant k\leqslant m$$

(5.13) $$u_m(t)=u_0,\ -\tau\leqslant t\leqslant 0$$

这里涉及带延迟的微分方程组(见 Bellman-Cooke[1]，Halanay[1])，它在一个区间 $[0,t_m]$ 确定 u_m；下面的先验估计证明，可取 $t_m=T$。□

先验估计(I)

从(5.12)推出

---

1) 见 M. Artola [1].

2) 这里与第 3 节的结果有一个本质的不同。可能（但未证明)第 3 节中的问题当 $a(u,v)$（至少其"主部"）非对称时是不适定的． 于是大概不能从定理 5.1 令 $\tau\to 0$ 而得到第 3 节的结果。我们没有实现这个关于 τ 的极限过渡，即使假定 $a(u,v)$ 是对称的。

(5.14) $(u_m'(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u_m(t)) + (\Phi(Mu_m(t)), u_m(t))$
$$= (f(t), u_m(t))$$
由此

(5.15)
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \alpha\|u_m(t)\|^2 - c_3|u_m(t)|^2$$
$$\leqslant \|f(t)\|_*\|u_m(t)\| + |(\Phi(Mu_m(t)), u_m(t))|$$

根据(5.2),我们有 $|\Phi(\lambda)| \leqslant c_1|\lambda| + c_2$，由此

(5.16)
$$|(\Phi(Mu_m(t)), u_m(t)| \leqslant \tau^{-1}\int_\Gamma (c_1|u_m(t)|$$
$$+ c_1|u_m(t-\tau)| + c_2\tau) \times |u_m(t)|d\Gamma$$
$$\leqslant c_4(\tau)\int_\Gamma |u_m(t)|^2 d\Gamma$$
$$+ c_5(\tau)\int_\Gamma |u_m(t-\tau)|^2 d\Gamma + c$$

其中 $c_4(\tau)$，$c_5(\tau)$ 依赖于 τ。

特别，可利用下列结果(例如见 Deny-Lions[1])：对所有 $\varepsilon > 0$，存在 c_6 使

(5.17)
$$\int_\Gamma |v|^2 d\Gamma \leqslant \varepsilon\|v\|^2 + c_6|v|^2, \forall v \in H^1(\Omega)$$

这个不等式应用于(5.16),我们推出

(5.18)
$$\left|\begin{aligned} &|(\Phi(Mu_m(t)), u_m(t))| \leqslant \frac{1}{4}\alpha(\|u_m(t)\|^2 \\ &\quad + \|u_m(t-\tau)\|^2) + c_6(\tau)(|u_m(t)|^2 \\ &\quad + |u_m(t-\tau)|^2) + c \end{aligned}\right.$$

利用不等式

$$\|f(t)\|_*\|u_m(t)\| \leqslant \frac{1}{4}\alpha\|u_m(t)\|^2 + 4\alpha^{-1}\|f(t)\|_*^2$$

从(5.15)推出

(5.19)
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_m(t)\|^2 - c_3|u_m(t)|^2$$
$$\leqslant \frac{4}{\alpha}\|f(t)\|_*^2 + \frac{1}{4}\alpha\|u_m(t-\tau)\|^2$$

$$+ c_6(\tau)(|u_m(t)|^2 + |u_m(t-\tau)|^2)$$

从 0 到 t 积分(5.19)即导出

(5.20) $$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma$$

$$\leqslant c_7(\tau)\int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma + c_6(\tau)\int_0^t |u_m(t-\tau)|^2 d\tau$$

$$+ \frac{1}{4}\alpha\int_0^t \|u_m(\sigma-\tau)\|^2 d\sigma$$

$$+ 4\alpha^{-1}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma$$

但

$$\int_0^t \|u_m(\sigma-\tau)\|^2 d\sigma$$

$$= \tau\|u_0\|^2 + \int_0^{t-\tau} \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma$$

$$\leqslant \tau\|u_0\|^2 + \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma$$

(还有对 H 中范数的类似不等式)。于是(5.20)给出

(5.21) $$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{1}{4}\alpha\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c_8$$

$$+ 4\alpha^{-1}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma$$

$$+ c_9(\tau)\int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma$$

于是特别有

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 \leqslant c_8 + 4\alpha^{-1}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma$$

$$+ c_9(\tau)\int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma$$

根据 Gronwall 不等式，就有

(5.22) $|u_m(t)| \leqslant c(\tau)$ (不依赖于 m，但依赖 τ 的常数) 此与(5.21)结合得到

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leqslant c(\tau) \quad \square \tag{5.23}$$

先验估计 (II)

借助 Fourier 变换，我们得到 u_m 对 t 的分数次导数的估计。

从(5.12)推出

$$(u_m'(t), w_k) = (\xi_m(t), w_k) \tag{5.24}$$

由(5.23)可验证

$$\int_0^T \|\xi_m(t)\|_*^2 dt \leqslant c(\tau) \tag{5.25}$$

以 0 值把 u_m, ξ_m 延拓到]0, T[之外得 $\tilde{u}_m$, $\tilde{\xi}_m$; 我们有

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), w_k) = (\tilde{\xi}_m(t), w_k) + (u_0, w_k)\delta(t) - (u_m(T), w_k)\delta(t-T) \tag{5.26}$$

对 t 作 Fourier 变换得 $\left(令\ \hat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i t s)\tilde{\varphi}(t)dt\right)$

$$2\pi i s(\hat{u}_m(s), w_k) = (\hat{\xi}_m(s), w_k) + (u_0, w_k) - (u_m(T), w_k)\exp(-2\pi i s T) \tag{5.27}$$

由此推出

$$2\pi i s|\hat{u}_m(s)|^2 = (\hat{\xi}_m(s), \hat{u}_m(s)) + (u_0, \hat{u}_m(s)) - (u_m(T), \hat{u}_m(s))\exp(-2\pi i s T) \tag{5.28}$$

由此 ($\beta > 0$, 待选择)形式地有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{1+|s|^\beta}|\hat{u}_m(s)|^2 ds \leqslant c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|s|^\beta}\|\hat{\xi}_m(s)\|_*\|\hat{u}_m(s)\| ds + c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|s|^\beta}|\hat{u}_m(s)| ds \tag{5.29}$$

(常数 c 依赖于 τ).

根据(5.23)和(5.25)我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{\xi}_m(s)\|_*\|\hat{u}_m(s)\| ds \leqslant c$$

于是由(5.29)得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|s|}{1+|s|^{\beta}}|\hat{u}_m(s)|^2ds\leqslant c$$

$$+c\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(1+|s|^{\beta})^2}\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}_m(s)|^2ds\right)^{1/2}\leqslant c,\ \text{若}\ \beta>1/2$$

因此

(5.30) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|s|^{\gamma}|\hat{u}_m(s)|^2ds\leqslant c,\ \text{若}\ 0<\gamma<1/2$$

过渡到极限

利用估计(5.22),(5.23),(5.30)从 Lions [1] 中第一章定理5.2 推出,可取一个子序列 u_μ,满足

(5.31) $$\begin{cases} u_\mu\to u,\ \text{在}\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\ \text{弱}^* \\ u_\mu\to u,\ \text{在}\ L^2(0,T;H^1(\Omega))\ \text{弱}\end{cases}$$

(5.32) $u_\mu\to u$,在 $L^2(0,T;H^\rho(\Omega))$ 强,ρ 固定,满足 $1/2<\rho<1$
于是由于"迹"$u\to u|_\Gamma=\gamma_0u$ 从 $H^\rho(\Omega)$ 到 $L^2(\Gamma)$ 连续(见 Lions-Magenes [1],第一章),我们有

(5.33) $$u_\mu\to u,\ \text{在}\ L^2(\Sigma)\ \text{强}$$

因此

(5.34) $$\Phi(Mu_\mu)\to\Phi(Mu),\ \text{在}\ L^2(\Sigma)\ \text{强}$$

于是在(5.12)中令 k 固定,并令 $m=\mu(\geqslant k)\to\infty$ 取极限,即得

$$\frac{d}{dt}(u(t),w_k)+a(u(t),w_k)+(\Phi(Mu(t)),w_k)$$
$$=(f(t),w_k)$$

这对任意 k 成立,故 u 满足(5.3).由于显然有(5.8),(5.9),我们就证明了解的存在性.

5.3 定理 5.1 中唯一性的证明

设 u 和 u_* 是两个可能的解.令 $w=u-u_*$,我们有

$$(w', v) + a(w, v) + (\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), v) = 0, \quad \forall v \in V$$

由此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + a(w(t), w(t)) + (\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), w(t)) = 0 \tag{5.35}$$

由于 Φ Lipschitz 连续，我们有

$$|(\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), w(t))|$$

$$\leqslant c\int_\Gamma |w(t) - w(t-\tau)||w(t)|d\Gamma$$

$$\leqslant (\text{根据}(5.17))\ \frac{1}{4}\alpha\|w(t)\|^2$$

$$+ \frac{1}{4}\alpha\|w(t-\tau)\|^2 + c|w(t)|^2 + c|w(t-\tau)|^2$$

于是由(5.35)推出，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \frac{3\alpha}{4}\|w(t)\|^2 \leqslant c|w(t)|^2 + \frac{\alpha}{4}\|w(t-\tau)\|^2 + c|w(t-\tau)|^2 \tag{5.36}$$

从 0 到 t 积分(5.36)；并注意到

$$\int_0^t \|w(\sigma-\tau)\|^2 \leqslant \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma$$

(及对范数| |的类似不等式)，即得

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha\int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c\int_0^t |w(\sigma)|^2 d\sigma$$

由此 $w = 0$。

6. 评 述

本章所研究的问题曾由作者在 Duvaut-Lions [2] 中引进。证明的细节这里第一次给出。对于处理这些问题的其它方法在 H. Brezis [2] 中给出。

正文中已经指出第 5 节的结果是很不完全的。对于其它的结果和其它类似的模型，见 D. Viaud [1]。

第三章 弹性和粘弹性中的古典问题和摩擦问题

为阅读本章只需知道第一章的 1，4 两节。

1. 引 言

本章我们论述弹性和粘弹性问题. 我们记得（下面显然将要精确化)粘弹性与弹性的区别在于：在粘弹性情况下，现在的应力状态依赖于过去时刻的所有形变(在弹性情况下则否).

本章的主要目的是研究在边界上带摩擦条件的问题，这导致新的变分不等方程问题；这是第 5 节及其后各节的内容. 第 2 至 4 节相当完整地研究古典问题.（尤其是给出了 Korn 不等式这一基本工具的证明.）

2. 古典线性弹性

2.1 特性定律

在我们作为出发点考虑的线性理论中，特性定律表达了应力张量 σ_{ij}（第一章 1.1）和线性化了的应变张量 $\varepsilon_{ij}(u)$（第一章 1.3）之间的线性关系，即

(2.1) $$\sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$$

在(2.1)中 a_{ijkh} 是弹性系数，它们独立于应变张量. 弹性系数有**对称性**

(2.2) $$a_{ijkh}=a_{jihk}=a_{khij}$$

和**椭圆性**

(2.3) $$a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant\alpha_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ \alpha_1>0\text{ 为常数，}\forall\varepsilon_{ij}$$

定律(2.1)一般相应于一各向异性材料。在材料非均匀时，弹性系数依赖于 x，但要假定它们是 x 的有界可测函数，下面要讲的全都适用，而不会遇到困难。(若要研究解的正则性，必须加上关于 x 的可微性条件。)

在上述条件下可"逆转"(2.1)：

(2.4) $$\varepsilon_{ij}(u)=A_{ijkh}\sigma_{kh}$$

其中

(2.5) $$A_{ijkh}=A_{khij}=A_{jihk}$$

且

(2.6) $$A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh}\geqslant\alpha_2\sigma_{ij}\sigma_{ij},\ \alpha_2>0,\ \forall\sigma_{ij}$$

令

(2.7) $$\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$$

代替(2.3)和(2.6)我们将利用下列关系

(2.8) $$\begin{cases}a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\\ A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh}\geqslant\alpha\sigma_{ij}\sigma_{ij}\end{cases}\quad\square$$

各向同性情形(见 P. Germain [1]，W. Prager [1])

这时，系数 a_{ijkh} 为

(2.9) $$a_{ijkh}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kh}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jh}+\delta_{ih}\delta_{jk})$$

其中数值 λ 和 μ 是 Lamé 系数。这时(2.1)成为

(2.10) $$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\quad(\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(u))$$

由此

(2.11) $$\sigma_{kk}=(3\lambda+2\mu)\varepsilon_{kk}$$

于是(2.10)的逆转关系是

(2.12) $$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

我们常常设

(2.13) $$3K=3\lambda+2\mu,\ \frac{1}{E}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)},$$

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

其中 K 是抗压刚性模量，E 是 Young 模量，ν 是 Poisson 系数

关系(2.12)通过 ν 和 E 表为

$$(2.14)\qquad \varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\quad \square$$

注 2.1 由物理意义知，K 和 μ（剪切模量）满足

$$K\geqslant 0,\ \ \mu\geqslant 0$$

这就蕴涵

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\geqslant 0$$

这里 σ_{ij} 和 ε_{ij} 由特性定律联系。在非各向同性情形，相应地是

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh}=a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant 0$$

更强的不等式(2.8)在实际中一般是满足的，但不是一个“根本性”的物理特征。

注 2.2（非线性弹性） 可按如下两种方式发展弹性的非线性[1]理论：

i）特性定律是应力张量和非线性应变张量（见第一章 1.3）之间的关系；视情形不同，我们得到“调和型”的材料（见 F. John[1]，[2]）或 Mooney 的材料（见 Mooney [1]）。

ii）特性定律是应力张量和线性化应变张量之间的非线性关系（见 Dinca[1]）。

毫无疑问，第 5 节及其后面所解决的若干问题可以在这种情况之下处理，但这尚待进一步阐明。

2.2 线性弹性的古典问题

2.2.1 质量守恒方程和运动方程的线性化

设 Ω 是一弹性体在非形变状态下所占据的 $\mathbf{R}^3$ 的一开区域。设 Ω 的边界 Γ 正则。用 $\{x_i\}$ 记一质点在非形变状态下的坐标，设 $\{X_i\}$ 是这同一质点在时刻 t 的坐标。我们有

---

1) 必须注意，从第 5 节开始研究的问题不是线性的，尽管所考虑的材料满足线性弹性定律。

(2.15) $$X_i = x_i + u_i(x, t)$$

其中 $\{u_i\}$ 是质点 $x = \{x_i\}$ 的位移向量．在"小"位移的假定下，我们对 u_i 线性化．这时对所有在 $x \in \mathbf{R}^3$，$t \geq 0$ 正则的函数 $(\xi, t) \to f(\xi, t)$我们有

(2.16) $$f(X, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial X_i}(X, t)_{X=x}u_i + \cdots$$

和

(2.17) $$\partial f(X, t)/\partial X_i = \partial f(x, t)/\partial x_i + \cdots$$

其中"…"表示关于 u_i 的更高阶的项．

质量守恒方程为(第一章 1.2)

(2.18) $$d\rho/dt + \rho\partial v_i(X, t)/\partial X_i = 0$$

在(对 u_i)线性化以后变成

(2.19) $$\partial\rho(x, t)/\partial t + \rho(x, t)\partial v_i(x, t)/\partial x_i = 0$$

于是对常量 x 我们有

$$d\rho/\rho + v_{i,i}dt = 0$$

在 $[0, t]$ 上积分之，

$$\log(\rho(x, t)/\rho(x, 0)) + \int_0^t v_{i,i}(x, \tau)dt = 0$$

由于 $u_i(x, t)$ 是小量，因此可假定 $v_{i,i} = \partial^2 u_i/\partial x\partial t$ 也是小量．从而，上述关系精确到一阶项则变为

(2.20) $$\rho(x, t) = \rho_0(x)\left[1 - \int_0^t v_{i,i}(x, \tau)d\tau\right]$$

其中令 $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$．

运动方程中的 $\rho\gamma_i$ 线性化为 $\rho_0\partial^2 u_i/\partial t^2$，而方程变为

(2.21) $$\rho_0(x)(\partial^2 u_i/\partial t^2) = \sigma_{ij,j} + f_i$$

我们将假定物质在其非形变状态下的密度是常量，可设

$$\rho_0 = 1$$

上述结果不难推广到 ρ_0 是有界可测函数且满足

$$\rho_0(x) \geq \rho_0 > 0$$

的情形$\left(只需用等价内积\int_\Omega \rho_0(x)f(x)g(x)dx 代替内积\int_\Omega fg\,dx\right)$.

总之，线性弹性方程是

$$\partial^2 u_i/\partial t^2 = \sigma_{ij,j} + f_i, \quad \Omega\text{内} \tag{2.22}$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) \tag{2.23}$$

形变后的密度由(2.20)给定(其中 $\rho_0(x) = 1$)；向量 $f = \{f_i\}$ 表示给定力的体密度。

2.2.2 边条件[1]

我们假定 Γ 的一部分 Γ_U 上的位移给定，在边界的其余部分 Γ_F 上表面力给定。假定 Γ_U 和 Γ_F 不依赖于时间[2]。于是

$$\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F, \quad \Gamma_U \cap \Gamma_F = \phi \tag{2.24}$$

(2.25) $u_i = U_i$，Γ_U 上，$\{U_i\}$ = 在 Γ_U 上给定的向量场，可能依赖时间，

(2.26) $\sigma_{ij}n_j = F_i$，Γ_F 上，$\{F_i\}$ = 在 Γ_F 上给定的力的面密度，

可能依赖于时间。□

注 2.3 Γ_U 或 Γ_F 中之一可能是空集。

注 2.4 边界上的数据(2.25)和(2.26)事实上可以作如下推广而无新的原则性的困难：可假定在 Γ 的每一点给定沿一个方向的位移(相应地应力)的分量和在垂直于这一方向的平面内应力（相应地位移）的分量。

2.2.3 概要·指南

总之，我们要找联系于方程(2.22)、(2.23)和边条件 (2.25)，(2.26)的 u 和 σ_{ij}，自然还要满足初条件

$$\begin{cases} u_i(x, 0) = u_{0i}(x) \\ \partial u_i(x, 0)/\partial t = u_{1i}(x) \end{cases} \tag{2.27}$$

在稳定情形(在第 3 节研究)，在(2.22)中令 $\partial^2 u_i/\partial t = 0$，显然条件(2.27)不再出现。

我们现在要给出发展问题的变分提法。

---

1) 这些边条件在引入摩擦后(第 5 节)要修改。

2) 放弃这个条件就会出现一个未解决而又十分有趣的问题。

2.3 发展问题的变分提法

2.3.1 Green 公式

令

(2.28) $$(Au)_i = -\partial/\partial x_j(a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u))$$

微分系 A 是弹性系

通常对 f, $g\in(L^2(\Omega))^3$ 令

$$(f, g)=\int_\Omega f_i g_i dx$$

而对于两个向量 u 和 v 令

(2.29) $$a(u, v)=\int_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

σ_{ij} 和 u 满足(2.1)，于是

$$(Au)_i = -\sigma_{ij,j}$$

$$a(u, v)=\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v)dx=\int_\Omega \sigma_{ij}(\partial v_i/\partial x_j)dx$$

$$=-\int_\Omega \sigma_{ij,j}v_i dx+\int_\Gamma(\sigma_{ij}n_j)v_i d\Gamma$$

于是得到 Green 公式

(2.30) $$\left|\begin{array}{l}(Au, v)=a(u, v)-\int_\Gamma(\sigma_{ij}n_j)v_i d\Gamma\\(\sigma_{ij}\text{ 和 }u\text{ 满足(2.1)})\end{array}\right.$$ □

注 2.5 后面要利用(经典)记号。我们有

(2.31) $$\left|\begin{array}{l}\sigma_N=\sigma_{ij}n_i n_j\\\sigma_T=\{\sigma_{iT}\}\\\sigma_{iT}=\sigma_{ij}n_j-\sigma_N n_i\end{array}\right.$$

和

(2.32) $$v_N=v_i n_i, v_T=v-nv_N(n=\{n_i\})$$

于是

$$(\sigma_{ij}n_j)v_i=\sigma_T v+\sigma_N v_N=\sigma_T v_T+\sigma_N v_N$$

代入(2.30)即得

(2.33) $$(Au, v) = a(u, v) + \int_{\Gamma}(\sigma_T v_T + \sigma_N v_N)d\Gamma$$ ▯

注 2.6 从(2.2),(2.8)推出

(2.34) $$a(u, v) = a(v, u), \ \forall u, v$$

(2.35) $$a(v, v) \geqslant \alpha \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx.$$

2.3.2 变分提法

利用刚才在 2.3.1 中引进的记号,(2.22)写成

(2.36) $$\partial^2 u/\partial t^2 + Au = f, \text{ 在 } Q = \Omega \times]O, T[\text{ 中}^{1)}$$

尚有边条件(2.25),(2.26)及初条件,可用前一章的记号记之为

$$u(t) = \text{函数 } x \to u(x, t), \ u'(t) = \partial u(t)/\partial t;$$

(2.37) $$u(0) = u_0$$

(2.38) $$u'(0) = u_1$$

取(2.36)与 $v - u(t)$ 的内积,这里 v 是检验函数,满足

(2.39) $$v_i = U_i, \ \Gamma_v \text{ 上}^{2)}$$

即得(跟(2.36)等价的条件)

(2.40) $$(u''(t), v - u(t)) + (Au(t), v - u(t)) = (f(t), v - u(t))$$

如常,作为弱提法的第一步,人们自然总是假定所有函数是正则的,于是可用分部积分.

利用(2.30),由于在 Γ_U 上 $v = u$,我们有

$$(Au(t), v - u(t)) = a(u(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_F}(\sigma_{ij}n_j)(v_i - u_i(t))d\Gamma$$

考虑到(2.26),上式为

(2.41) $$(Au(t), v - u(t)) = a(u(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_F} F(t)(v - u(t))d\Gamma$$

---

1) T 任意固定,可令 $T \to +\infty$.

2) 稍后可以看到,为什么取同 $v - u$ 的内积是有意义的. 注意 v 遍历一个仿射空间.

于是由(2.40)推出

$$
(2.42)\quad \begin{cases} (u''(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) \\ \qquad = (f(t), v - u(t)) + \int_{\Gamma_F} F(t)(v - u(t))d\Gamma \\ \forall v,\ v \text{ 满足}(2.39). \end{cases}
$$

反之，若 $u = u(t)$ 是满足(2.25)(即在 Γ_U 上 $u_i = U_i$)，(2.42)和(2.37)，(2.38)的(正则)函数，则 u 是所研究的问题的解(只需把计算步骤倒过来)。

指南。下面(第 4 节)我们将在适当的意义上解决此问题。在这之前(第 3 节)我们要研究稳定情形，其本身也是重要的，它的研究对解决发展问题也是必不可少的。

3. 静 态 问 题

3.1 古典提法

沿用第 2 节的记号，在静态情况下，问题在于求函数 u，满足下列方程和边条件：

$$
(3.1)\qquad Au = f,\ \Omega \text{ 内}
$$

$$
(3.2)\qquad u_i = U_i,\ \Gamma_U \text{ 上},
$$

$$
(3.3)\qquad \sigma_{ij}n_j = F_i,\ \Gamma_F \text{ 上}
$$

3.2 变分提法

形式上，(见 2.3.2)问题等价于求 u，满足(3.2)且使

$$
(3.4)\qquad a(u, v - u) = (f, v - u) + \int_{\Gamma_F} F(v - u)d\Gamma
$$

对满足

$$
(3.5)\qquad v_i = U_i,\ \Gamma_U \text{ 上}
$$

的所有 v 成立。

解释　一个满足 (3.5) 的向量场 $v = \{v_i\}$ 称为在运动学上是允许的(简言之，v 是一 c. c. a.)。于是

u 是一 c.c.a.，对所有 c.c.a. 使(3.4)成立，换言之，u 是一 c.c.a.，在所有 c.c.a. 中，它使由

$$(3.6) \qquad I(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)-\int_{\Gamma_F} Fv d\Gamma$$

定义的 v 的势能取最小值。

更确切一些，令[1]

$$(3.7) \qquad V=\{v \mid v=\{v_i\}, v_i \in H^1(\Omega)\}=(H^1(\Omega))^3$$

对下述内积它是一个 Hilbert 空间：

$$(3.8) \qquad (u,v)=(u_i, v_i)_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) dx$$

对 $v \in V$，可定义 v_i 在 Γ 上的迹，且 $v_i \in H^{1/2}(\Gamma)$. 于是 c.c.a. 定义为 $v \in \mathscr{U}_{ad}$ 这里

$$(3.9) \qquad \mathscr{U}_{ad}=\{v \mid v \in V, v_i=U_i \text{ 于 } \Gamma_U \text{ 上}\}$$

只要

$$(3.10) \qquad U_i \in H^{1/2}(\Gamma)$$

上述 $\mathscr{U}_{ad}$ 的定义就有意义(即定义了一个非空集)。这时 $\mathscr{U}_{ad}$ 是 V 中的一闭仿射线性流形。

此外，对 $v \in \mathscr{U}_{ad}$ 可在 Γ_F 上定义 v_i，特别 v_i 属于 $H^{1/2}(\Gamma_F)$，但不取遍 $H^{1/2}(\Gamma_F)$；v_i 应在 Γ_F 和 Γ_U 的交界处满足“连结条件”，由于在 Γ_U 上 $v_i=u_i=U_i$，这些连结条件技术上看来是复杂的(见 Lions-Magenes[1]，第 1 卷，对类似问题，第 1，2 章)；为避免这些(技术性)困难，我们假定

$$(3.11) \qquad F \in (L^2(\Gamma_F))^3$$

于是 $v \to \int_{\Gamma_F} Fv d\Gamma$ 在 V 上连续，我们就可用下列(最终的)方式叙述静态问题：

问题 3.1 在 $\mathscr{U}_{ad}$ 上由 $I(v)$ 给定的“势能”泛函取极小值，可归结为：求 $u \in \mathscr{U}_{ad}$，使对任意 $v \in \mathscr{U}_{ad}$，(3.4)成立。

现在基本的问题是 $a(v,v)$ 的强制性，这个问题基于 Korn

---

1) 现利用第一章，第 4 节。

不等式，是下面 3.3 的研究对象。

3.3 Korn 不等式及其推论

定理 3.1 设 Ω 是一边界正则的有界开集[1]。则存在常数 $c>0$（依赖于 Ω）使

$$(3.12)\quad \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx+\int_\Omega v_iv_idx\geqslant c\|v\|_V^2,\ \forall v\in V$$

这个结果并非平凡，须知 (3.12) 的左端仅包含一阶导数的一些线性组合，即 $v_{i,j}+v_{j,i}$，而(3.12) 右端包含所有一阶导数；"反向"不等式显然成立，因而(3.12)等价于

(3.13) $\left(\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx+\int_\Omega v_iv_idx\right)^{1/2}$ 是 V 上等价于 $\|v\|_V$ 的范数。

定理 3.1 是下列定理的一个简单推论(下面就可看到)。

定理 3.2 设 Ω 是一边界正则的[2]有界开集。v 是 Ω 上的一广义函数，满足

$$(3.14)\qquad v\in H^{-1}(\Omega),\ v_{,i}\in H^{-1}(\Omega),\ \forall i$$

则

$$(3.15)\qquad v\in L^2(\Omega)$$

由定理 3.2 证明定理 3.1。

设 E 是 $v\in(L^2(\Omega))^3$ 的空间，v 满足

$$\varepsilon_{ij}(v)\in L^2(\Omega),\ \forall_{ij}$$

对于范数

$$\left(\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx+\int_\Omega v_iv_idx\right)^{1/2}$$

E 是 Hilbert 空间。我们有

---

1) 更一般地，若 Ω 是一个有界或无界开集，其边界可用有限个"局部"图描述，它们是在两个方向一次连续可微且有界的函数，则结论仍成立。一个开集 Ω 的正则边界有界或"正则地走向无穷"，即是这种情形。

2) 见定理 3.1 的脚注。

$$(3.16)\qquad \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jk}(v)$$

若 $v \in E$，且 $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$，则有 $\partial\varepsilon_{ij}(v)/\partial x_k \in H^{-1}(\Omega)$，从而(3.16)给出

$$(3.17)\qquad \partial^2 v_k/\partial x_j \partial x_k \in H^{-1}(\Omega),\ \forall_{i,j,k}$$

对 $v_{i,k}$ 应用定理 3.2，可见，(3.17)导出

$$v_{i,k} \in L^2(\Omega),\ \forall_{i,k}$$

故 $v \in (H^1(\Omega))^3$. 于是有代数等式 $E = (H^1(\Omega))^3$. 由于从 $(H^1(\Omega))^3$到 E 的单射连续，如上所述它又是满射的，故(根据闭图象定理)这必是一个同构，由此即得(3.12). □

注 3.1 上述证明的一个变形指出，定理 3.2 暗含了一常数 c_1 的存在性，它使得

$$(3.18)\qquad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1\left(\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\|v_{,i}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right),$$

由此可重新导出(3.12). □

定理 3.2 的证明. 为此，引入空间

$$(3.19)\qquad X(\Omega) = \{v \mid v \in H^{-1}(\Omega),\ v_{,i} \in H^{-1}(\Omega),\ \forall i\}$$

(对于下列范数它是一个 Hilbert 空间，

$$\left(\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\|v_{,i}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{1/2}\Bigg)$$

问题在于证明

$$(3.20)\qquad X(\Omega) = L^2(\Omega)$$

证明可分成几步.

i) 性质(3.20)当 $\Omega = \mathbf{R}^3$[1] 时为真.

事实上由 Fourier 变换(见第一章第 4 节)条件(3.14) 等价于

---

1) 自然空间维数等于 3，在这里不起任何作用.

$$(1+|\xi|^2)^{-1/2}\hat{v}\in L^2(\mathbf{R}^3_\xi),\ (1+|\xi|^2)^{-1/2}\xi_i\hat{v}\in L^2(\mathbf{R}^3_\xi)$$

于是

$$\int_{R^3}(1+|\xi|^2)^{-1}\left(1+\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\right)|\hat{v}|^2 d\xi<\infty$$

即

$$v\in L^2(\mathbf{R}^3)=L^2(\Omega)$$

ii) 只需对半空间

$$\Omega=\{x|x_3>0\} \tag{3.21}$$

证明(3.20)。事实上，设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 满足

(3.22) $\left|\begin{array}{l}\alpha_0\in\mathscr{D}(\Omega),\ \alpha_i\in\mathscr{D}(\bar{\Omega}),\ i=1,\cdots,N,\\ \sum_{i=0}^{N}\alpha_i=1,\ \alpha_i \text{ 的支集在定义 } \Gamma^{1)} \text{ 的一个}\\ \text{局部图内。}\end{array}\right.$

一般地，若 $\varphi\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$，则 $v\to\varphi v$ 映 $X(\Omega)$ 到 $X(\Omega)$ 内；于是

$$v=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i v \tag{3.23}$$

中每一项属 $X(\Omega)$。但可以把 $\alpha_0 v$ 看作 $X(\mathbf{R}^3)$ 中的元素(Ω 外扩张为 0)。于是由 i) 有 $\alpha_0 v\in L^2(\Omega)$。根据 (3.23)，只要证明 $\alpha_i v\in L^2(\Omega)$，结果就将得证。但 $\alpha_i v$ 的支集在一局部图内；可以考虑它在半空间(3.21)中的象，若设 Γ 是 $n-1$ 维一次连续可微流形，$\alpha_i v$ 的象在 $X(\Omega)$ 内，Ω 由(3.21)给定，由此断言，ii)得证。

于是，以下假定 Ω 由(3.21)给定。

iii) 引入

$$H_0^1(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^2))=\{\varphi|\varphi,d\varphi/dx_3\in L^2(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^2)),\ \varphi(x',0)=0\}$$

(其中 $x'=\{x_1,x_2\}$，)

$H^{-1}(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^2))=H_0^1(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^2))$ 的对偶(当 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 等同于对偶时)，

---

1) 若 Γ 不是有界的，则一些 α_i 的支集不是紧的，但由条件是在一个图内，其同胚象在半空间(3.21)内。

(3.24) $$Y(\Omega)=\{v \mid v, dv/dx_3 \in H^{-1}(0,\infty; L^2(\mathbf{R}^2))\}$$

我们有 $Y(\Omega)\subset X(\Omega)$. 更确切地说

(3.25) $$Y(\Omega) \text{ 在 } X(\Omega) \text{ 中稠密.}$$

事实上，设 ρ_m 是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^2_{x'})$ 中的一正则化序列：对 $v\in X(\Omega)$，定义

(3.26) $$v_m = v(x')*\rho_m$$

(对所有 $[0,\infty]$ 上取值在 $L^2(\mathbf{R}^2_{x'})$ 中的广义函数和所有从 $L^2(\mathbf{R}^2_{x'})$ 到自身的连续线性算子 π，定义 πf 为 $[0,+\infty]$ 上取值在 $L^2(\mathbf{R}^2_{x'})$ 中的广义函数)；形式地

$$v_m(x)=\int_{R^2} v(x'-y', x_3)\rho_m(y')dy', \; y'=\{y_1, y_2\}$$

则当 $m\to\infty$ 时，在 $X(\Omega)$ 中 $v_m\to v$，而 v_m 特别地在 $Y(\Omega)$ 中(事实上，v_m 和 dv_m/dx_3 在 $H^{-1}(0,\infty; H^k(\mathbf{R}^2))$ 中，$\forall k$)。

iv) $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ 在 $X(\Omega)$ 中稠密.

由于(3.25)，只需指出

(3.27) $$\mathscr{D}(\bar{\Omega}) \text{ 在 } Y(\Omega) \text{ 中稠密}$$

为此利用 Hahn-Banach 定理. 设 $v\to M(v)$ 是 $Y(\Omega)$ 上的一个连续线性型，于是它可表为

(3.28) $$M(v)=\int_0^\infty [(f, v)+(g, dv/dx_3)]dx_3,$$

$$f, g\in H_0^1(0,\infty; L^2(\mathbf{R}^2_{x'}))$$

假定对任意 $v\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$，$M(v)=0$，则必须证明 $M=0$. 但若 $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ 表示在 $x_3<0$ 取零值的 f, g 的延拓，则条件

$$\text{“}M(v)=0, \; \forall v\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})\text{”}$$

等价于

(3.29) $$\tilde{f}-d\tilde{g}/dx_3=0$$

于是

$$d\tilde{g}/dx_3\in H^1(-\infty,+\infty; L^2(\mathbf{R}^2_{x'}))$$

因此

(3.30) $$g\in H_0^2(0,\infty; L^2(\mathbf{R}^2_{x'}))$$

于是

$$\int_0^\infty (g, dv/dx_3)dx_3 = -\int_0^\infty (dg/dx_3, v)dx_3, \forall v \in Y(\Omega)$$

从而对任意 $v \in Y(\Omega)$，$M(v) = 0$。

v) 对 $v \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$，令

$$(3.31)\qquad Pv(x) = \begin{cases} v(x), \text{ 若 } x_3 > 0 \\ a_1 v(x', -x_3) + a_2 v(x', -2x_3), \text{若 } x_3 < 0 \end{cases}$$

其中

$$(3.32)\quad a_1 + a_2 = 1,\ a_1 + a_2/2 = -1 \ (\text{即 } a_1 = -3, a_2 = 4)$$

可以证明

(3.33) $v \to Pv$ 从 $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$（赋以由 $X(\Omega)$ 引出的拓扑）到 $X(\mathbf{R}^3)$ 连续。

可暂时承认这一点。我们看到，根据 iv)，可以延拓 $v \to Pv$ 成从 $X(\Omega)$ 到 $X(\mathbf{R}^3)$ 的一连续线性映射，仍记为 $v \to Pv$。它满足

$$(3.34)\qquad Pv \text{ 在 } \Omega \text{ 的限制} = v$$

于是，对 $v \in X(\Omega)$，$Pv \in X(\mathbf{R}^3)$。而由 i)，$Pv \in L^2(\mathbf{R}^3)$，故由(3.34) $v \in L^2(\Omega)$。

剩下要证明(3.33)。由于 $a_1 + a_2 = 1$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_3} Pv = \begin{cases} \partial u/\partial x_3, \ x_3 > 0 \\ -a_1 \dfrac{\partial v}{\partial x_3}(x', -x_3) - 2a_2 \dfrac{\partial v}{\partial x_3}(x', -2x_3), \ x_3 < 0 \end{cases}$$

令 $\partial v/\partial x_3 = w$，引入

$$(3.35)\qquad Qw = \begin{cases} w, \text{ 若 } x_3 > 0 \\ -a_1 w(x', -x_3) - 2a_2 w(x', -2x_3), \text{若 } x_3 < 0 \end{cases}$$

于是问题在于指出 P（相应地 Q）从 $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$（赋以由 $H^{-1}(\Omega)$ 引入的拓扑）到 $H^{-1}(R^3)$ 连续，由转置，只需证明 ${}^tP$（相应地 ${}^tQ$）从 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 到 $H_0^1(\Omega)$ 连续。

而对 $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^3)$，我们有

$${}^tP\varphi(x) = \varphi(x) + a_1\varphi(x', -x_3) + \frac{1}{2} a_2 \varphi(x', -x_3/2).$$

$$'Q\varphi(x) = \varphi(x) - a_1\varphi(x', -x_3) - a_2\varphi(x', -x_3/2)$$

于是由(3.32)得 $'P\varphi(x', 0) = 'Q\varphi(x', 0) = 0$，由此得结果. □

注 3.2 在 Gobert [1] 中有另一证明，在对 Ω 更一般的条件下(只需 Ω 有"锥性质")有效，但要利用奇异积分的理论. □

现在要从上述结果推出对本章后面是重要的一些推论.

定理 3.3 设定理 3.1 的条件成立. 设 $\Gamma_U \subset \Gamma$，Γ_U 的测度为正. 又设

(3.36) $$V_0 = \{v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v = 0\}$$

则存在 $\alpha_0 > 0$ 使

(3.37) $$a(v, v) \geqslant \alpha_0 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V_0$$

证明. 1)下列一般命题成立

(3.38) $$a(v, v) = 0 (v \in V) \Longleftrightarrow v \in \mathscr{R}$$

其中

(3.39) $$\mathscr{R} = \{v \mid v(x) = a + b \wedge x, \; a, b \in \mathbf{R}^3\}$$[1]

因为 Γ_U 是正测度的，

$$v \in \mathscr{R} \cap V_0 \Rightarrow v = 0$$

因此

(3.40) $$a(v, v) = 0, \; v \in V_0 \Longleftrightarrow v = 0$$

2)由 1)看到 $a(v, v)^{1/2}$ 在 V_0 上是一范数，必须证明这范数等价于 $\|v\|_V$. 为了简便，令

(3.41) $$\varepsilon(v) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

根据(2.35)和定理 3.1，所有问题归结为证明，存在 $c_0 > 0$ 使

(3.42) $$\varepsilon(v) \geqslant c_0|v|^2, \quad |v|^2 = \int_\Omega v_i v_i dx, \quad \forall v \in V_0$$

v 代以 $v|v|^{-1}$，可以假定 $|v| = 1$，这时必须证明，存在 $c_0 > 0$ 使 $\varepsilon(v) \geqslant c_0$. 用反证法. 如果结果不成立，则存在序列 $v_n \in V_0$ 使

(3.43) $$|v_n| = 1, \quad \varepsilon(v_n) \to 0$$

---

1) $\mathscr{R}$ = 刚体位移集.

由定理 3.1，这时 $\|v_n\|_V \leqslant C$；于是，可取子序列，仍记 v_n，使

(3.44) $$v_n \to v, \text{ 在 } V \text{ 中弱}$$

而这时有

$$\liminf \varepsilon(v_n) \geqslant \varepsilon(v)$$

于是 $\varepsilon(v) = 0$，由 1) $v = 0$.

另外，Ω 有界，且具边界正则，单射 $V \to (L^2(\Omega))^3$ 是紧的，因而 $v_n \to 0$（在 $(L^2(\Omega))^3$ 中强），此与假设 $|v_n| = 1$ 矛盾，由此即得结果. □

推论 3.1 假定 Ω 有界且具边界正则，Γ_U 的测度为正，则对 (3.6) 给定的 $I(v)$ 有

(3.45) $$I(v) \to +\infty, \text{当 } \|v\|_V \to +\infty, v \in \mathscr{U}_{ad} \text{ 时}$$

证明. 设 $\Phi \in V$ 满足

$\Phi = U$，在 Γ_U 上

于是若 $v \in \mathscr{U}_{ad}$，$v - \Phi \in V_0$，令 $v - \Phi = v_0$ 则

$$\begin{aligned} I(v) = & \frac{1}{2} a(v_0, v_0) + a(v_0, \Phi) \\ & + \frac{1}{2} a(\Phi, \Phi) - (f, \Phi + v_0) \\ & - \int_{\Gamma_F} F(v_0 + \Phi) d\Gamma \end{aligned}$$

由定理 3.3 知

$$I(v) \geqslant \frac{1}{2} \alpha_0 \|v_0\|_V^2 - c_1 \|v_0\|_V - c_2$$

由此

(3.46) $$I(v) \geqslant \alpha_1 \|v\|_V^2 - c_3 \|v\|_V - c_4, \ \forall v \in \mathscr{U}_{ad}$$

特别有(3.45). □

现考虑 $\Gamma_U = \varnothing$ 的情形. 这时，$a(v, v)^{1/2}$ 不再是 $V_0 = V$ 上的范数，而是半范数. 根据(3.38)，可过渡到关于 $\mathscr{R}$ 的商空间；引入

(3.47) $$V^{\cdot} = V / \mathscr{R}.$$

对 $u^{\cdot}, v^{\cdot} \in V^{\cdot}$，定义

(3.48) $$a(u^*, v^*) = a(u, v),\ u \in u^*,\ v \in v^*$$

我们有

定理 3.4 设定理 3.1 的条件成立，则

(3.49) $$a(v^*, v^*) \geqslant \alpha \|v^*\|_{V^*}^2,\ \alpha > 0,\ \forall v^* \in V^*.$$

证明. 根据定理 3.1 可在 V 上取范数

$$(\varepsilon(v) + |v|^2)^{1/2}$$

于是(3.49)等价于

(3.50) $$\varepsilon(v) \geqslant \alpha [\inf_{\rho \in \mathscr{R}} |v + \rho|^2 + \varepsilon(v)]$$

定义

(3.51) $P = (L^2(\Omega))^3$ (带相应于$|\sigma|$ 的内积)中从$(L^2(\Omega))^3$ 到$\mathscr{R}$的投影算子

则有

$$\inf_{\rho \in \mathscr{R}} |v + \rho|^2 = |v - Pv|^2$$

而证明(3.50)等价于(与(3.42)比较)证明

(3.52) $$\varepsilon(v) \geqslant c_1 |v - Pv|^2,\ \forall v \in V$$

我们使用证明(3.42)的方法. v 代以 $v|v - Pv|^{-1}$，可归结为

(3.53) $$|v - Pv| = 1$$

于是必须证明，存在 $c_1 > 0$ 使

(3.54) $$\varepsilon(v) \geqslant c_1$$

用反证法. 若(3.54)不真，则可找到V 的一序列 v_n，满足

(3.55) $$|v_n - Pv_n| = 1,\ \varepsilon(v_n) \to 0$$

但若令

(3.56) $$w_n = v_n - Pv_n$$

则我们有

$$|w_n| = 1,\ \varepsilon(w_n) \to 0$$

由此推出(如对(3.43))可取子序列 w_n，满足

$$w_n \to w \text{ 在} V \text{中弱},\ \varepsilon(w) = 0$$

故 $w \in \mathscr{R}$. 另一方面，$w_n \in \mathscr{R}^{\perp}$[1)]，于是 $w \in \mathscr{R}^{\perp}$，故 $w = 0$.

1) $\mathscr{R}^{\perp}$ 是V 的正交于$\mathscr{R}$的子空间，赋以 $(L^2(\Omega))^3$ 导出的 Hilbert 结构.

但那时 $w_n \to 0$ 在 $(L^2(\Omega))^3$ 强，而因 $|w_n| = 1$，这是荒谬的。▯

3.4 结果

3.4.1 “Γ_U 有正测度”的情形

由推论 3.1 和(连续)泛函 $v \to I(v)$ 在 $\mathscr{U}_{ad}$ 上的严格凸性立即推出

定理 3.5 设定理 3.1 的条件成立，则问题 3.1 有唯一解。

注 3.3 回到(3.4)，(3.5)的提法。可把该提法变为向量空间的情形；引入 $\Phi \in V$，在 Γ_U 上，$\Phi = U$，令

(3.57) $\quad u - \Phi = u_0,\ v - \Phi = v_0,\ u_0, v_0 \in V_0$，$V_0$由(3.36)定义

那么(3.4)，(3.5)等价于求 $u_0 \in V_0$，满足

(3.58) $$a(u_0, v_0) = (f, v_0) + \int_{\Gamma_F} F v_0 d\Gamma - a(\Phi, v_0),$$
$$\forall v_0 \in V_0 \ ▯$$

3.4.2 “Γ_U 是空集”的情形[1]

这时，我们已看到必须过渡到关于 $\mathscr{R}$ 的商空间。这时 $\mathscr{U}_{ad} = V =$ 向量空间，故 (3.4)，(3.5)(作变换(3.57))等价于求 $u \in V$，满足

(3.59) $$a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma} F v d\Gamma,\ \forall v \in V,\ (\Gamma_F = \Gamma)$$

问题仅当(3.59)右端的线性型在 $\mathscr{R}$ 上为零时才能可解，即必须

(3.60) $$\int_{\Omega} f_i \rho_i dx + \int_{\Gamma} F_i \rho_i d\Gamma = 0,\ \forall \rho \in \mathscr{R}$$

从力学观点看，(3.60)表示力 $\{f_i\}$ 和 $\{F_i\}$ (这是仅有的数据)的转矩等价于零。

若令

(3.61) $$L(v) = (f, v) + \int_{\Gamma} F v d\Gamma$$

可以“过渡到对于 $\mathscr{R}$ 的商空间”：定义 $\dot{V} = V/\mathscr{R}$ 上的连续线

1) 诚然有介于条件 3.4.1 和 3.4.2 之间的情形，见注 3.5.

性型 L^* 如下:

(3.62) $$L^*(v^*) = L(v), v \in v^*$$

则(3.59)等价于

(3.63) $$a(u^*, v^*) = L^*(v^*), \forall v^* \in V^*$$

根据定理 3.4,这个问题有唯一解,即

定理 3.6 假定 $\Gamma_U = \varnothing$ 力 f_i 和 F_i 满足 (3.60), 则问题(3.1)有解 u, 在可相差一任意刚体位移的意义下是唯一确定的。

注 3.4 在定理 3.6 中,应变场和应力场有唯一性。 □

注 3.5 已经指出,在"Γ_U 有正测度"和 "$\Gamma_U = \varnothing$"之间有中间情况。

例如,当代替力密度,考虑点力,则 Γ_F 就退化为有限个点。 □

注 3.6 我们只感兴趣于弱解。对于解的正则性,可参见关于椭圆型方程的著作: Lions-Magenes [1], Nécas [1]。

3.5 对偶提法

我们将从两个稍微不同的观点考虑对偶提法。

3.5.1 静态允许场和势能

我们重新考虑问题(3.1),(3.2),(3.3),或

(3.64) $$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u), \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{ij} n_j = F_i, \Gamma_F \text{ 上} \\ u_i = U_i, \Gamma_U \text{ 上} \end{cases}$$

引入静态允许场(缩写为 c.s.a.) 的集合 K:

(3.65) $$K = \{\tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \forall i, j, \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij,j} + f_i = 0, \Omega \text{ 内}, \tau_{ij} n_j = F_i, \Gamma_F \text{ 上}\}$$

注 3.7 引入空间

(3.66) $$H = \{\tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \forall i, j\}$$

H 上赋以 Hilbert 结构

$$(\sigma, \tau) = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx$$

可以证明，若 $\tau\in H$ 且满足

$$\tau_{ij,j}+f_i=0$$

即 $\tau_{ij,j}\in L^2(\Omega)$，则可唯一决定

(3.67)
$$\tau_{ij}n_j\in H^{-1/2}(\Gamma)$$

使K的定义(3.65)有意义。K是H的一个闭仿射流形。▯

对 $\tau\in K$，其势能 $J(\tau)$ 为

(3.68)
$$J(\tau)=\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)-\int_{\Gamma_U}\tau_{ij}n_jU_i d\Gamma$$

其中按一般方式

(3.69)
$$\mathscr{A}(\sigma,\tau)=\int_\Omega A_{ijkh}\sigma_{kh}\tau_{ij}dx$$

原问题的对偶问题是

问题 3.2　在K上求 $J(\tau)$ 的最小值。▯

注 3.8　在问题3.2中要假定K非空。

若 Γ_U 有正测度，$U_i\in H^{1/2}(\Gamma_U)$（确切地说，U_i 是 $H^{1/2}(\Gamma)$ 中的元素在 Γ_U 上的限制），K 非空。

若 $\Gamma_U=\phi$，则 K 非空当且仅当力 f_i 和 F_i 的转矩等价于零。▯

根据(2.8)，我们有

$$\mathscr{A}(\tau,\tau)\geqslant\alpha\int_\Omega\tau_{ij}\tau_{ij}dX=\alpha\|\tau\|_H^2$$

由此立得

定理 3.7　假定K非空（见注 3.8），问题 3.2 有且仅有一个解 σ。

剩下要说明原问题和“对偶”问题（这至此仍停留在定义上！）之间的关系；这正是下述定理。

定理 3.8　假定K非空。设σ是问题3.2的解，则方程

(3.70)
$$\varepsilon_{ij}(u)=A_{ijkh}\sigma_{kh}$$

和边条件

(3.71)
$$u=U,\ \Gamma_U\text{ 上}$$

(相应地，当 $\Gamma_U = \phi$ 时无边条件)以唯一方式（相应地精确到一个刚体位移)决定问题 3.1 的(相应地一个)解。

证明．只需要证明，若 u 是问题 3.1 的解(或解中的一个)，则由 $\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$ 定义的 σ 使 J 在 K 上取最小值．即满足

$$\mathscr{A}(\sigma, \tau - \sigma) - \int_{\Gamma_U} U_i(\tau_{ij}n_j - \sigma_{ij}n_j)d\Gamma = 0$$

在(3.69)中利用(3.70)即得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\sigma, \tau - \sigma) &= \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dx \\
&= \int_\Omega u_{i,j}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dx \\
&= \int_\Gamma u_i(\tau_{ij}n_j - \sigma_{ij}n_j)d\Gamma \\
&\quad - \int_\Omega u_i(\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j})dx \\
&= \int_{\Gamma_U} u_i(\tau_{ij}n_j - \sigma_{ij}n_j)d\Gamma \text{ (因 } \sigma, \tau \in K)
\end{aligned}$$

由于在 Γ_U 上 $u_i = U_i$，由此即得结果．□

3.5.2 对偶和 Lagrange 乘子

我们要用“Lagrange 乘子”(记为 q_{ij}) 再次得到上述的结果[1]，从泛函 $I(v)$ 出发，并把等式

$$a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(v) = \tau_{ij} \tag{3.72}$$

看作约束，对之引入乘子 q_{ij}。

注意在约束(3.72)下，有

$$a(v, v) = \mathscr{A}(\tau, \tau)$$

我们引入泛函

$$I(\tau, v, q) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv d\Gamma - \int_\Omega q_{ij}(\tau_{ij} - a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(v))dx \tag{3.73}$$

---

1) 我们给一个直接的叙述，而不求助于对偶的一般定理，关于对偶的一般定理我们特别推荐 Rockafellar[1] 和 Temam[2].

其中 τ, v, q 是独立变量，$\tau, q \in H, v \in V$，在 Γ_U 上 $v_i = U_i$，即 $v \in \mathscr{U}_{ad}$[1]。

注意

$$
\text{(3.74)} \quad \operatorname*{Inf}_{\tau, v \in H} I(\tau, v, q) = \hat{I}(q) \leqslant \operatorname*{Inf}_{\tau, v \text{满足(3.72)}} I(\tau, v, q)
$$

$$
= \operatorname{Inf} I(v) = I(u)
$$

于是

$$
\text{(3.75)} \qquad \operatorname{Sup} \hat{I}(q) \leqslant I(u)
$$

现计算 $\hat{I}(q)$ 的显式。我们有

$$
I(\tau, v, q) = I_1(\tau, v, q) + I_2(\tau, v, q)
$$

其中

$$
I_1(\tau, v, q) = I_1(\tau, q) = \frac{1}{2} \mathscr{A}(\tau, \tau) - \int_\Omega q_{ij} \tau_{ij} dx
$$

$$
I_2(\tau, v, q) = I_2(v, q) = -(f, v) - \int_{\Gamma_F} F v d\Gamma
$$

$$
+ \int_\Omega q_{ij} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(v) dx
$$

容易验证

$$
\text{(3.76)} \quad \operatorname*{Inf}_{\tau} I_1(\tau, q) = -\frac{1}{2} \mathscr{A}(\tau, \tau)\text{，其中 } A_{ijkh} \tau_{kh} = q_{ij}
$$

进而

$$
I_2(v, q) = -(f, v) - \int_{\Gamma_F} F v d\Gamma + \int_\Omega \tau_{kh} v_{k,h} dx
$$

可以验证

$$
\operatorname*{Inf}_{v \in \mathscr{U}_{ad}} I_2(v, q) = -\infty\text{，除非 } \tau \in K\text{，}
$$

此时

$$
\operatorname{Inf} I_2(v, q) = \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma
$$

于是

---

1) 人们可以把条件在 Γ 上 $v_i = U_i$ “看作约束”而引入相应乘子；有许多可能的对偶形式。

$$
(3.77) \qquad \hat{I}(q) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau) + \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\tau, \\ \quad \text{当 } \tau \in K,\ \text{其中 } q_{ij} = A_{ijkh}\tau_{kh} \\ -\infty,\ \text{其他} \end{cases}
$$

而

$$
(3.78) \qquad I(u) = -\frac{1}{2}a(u,u) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i d\Gamma
$$

因此

$$
I(u) = -\frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma,\sigma) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i d\Gamma
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Sup}_{q} \hat{I}(q) &= \operatorname*{Sup}_{\tau\in H}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau) + \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma\right) \\
&\geqslant -\frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma,\sigma) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{kh} n_h U_k d\Gamma = I(u)
\end{aligned}
$$

这式与(3.75)比较，即证明

$$
(3.79) \qquad \operatorname{Sup} \hat{I}(q) = I(u)
$$

代 $\hat{I}(q)$ 以其值(3.77)，我们有

$$
(3.80) \qquad \operatorname*{Inf}_{\tau\in K}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma\right] + I(u) = 0
$$

或

$$
(3.81) \qquad \operatorname*{Inf}_{\tau\in K}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma\right] + \operatorname*{Inf}_{v\in \mathscr{U}_{ad}} I(v) = 0
$$

此外，若第一个 Inf（相应地，第二个）在 σ（相应地，在 u）上得到，则 σ 和 u 满足

$$
\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) \quad \square
$$

注 3.9 在 Tonti[1] 中有弹性问题的变分提法的详细研究。

4. 动态问题

4.1 主要结果的陈述

利用第 3 节的结果，我们就能够解决第 2 节中的动态问题了。

引入一个函数[1)]

(4.1) $\Phi(t)\in(H^1(\Omega))^3,\ \Phi_i(t)=U_i(t),\ \Gamma_U$ 上

那么 $u(t)$ 代以 $u(t)-\Phi(t)$，保持记号 $u(t)$，问题(2.42) 等价于下列问题：定义

(4.2) $V_0=\{v|v\in(H^1(\Omega))^3,\ 在\Gamma_U\ 上\ v_i=0\}$

(于是 $V_0=V=(H^1(\Omega))^3$ 如果 $\Gamma_U=\varnothing$)；求一个从$[0,T]$ 到 V_0 的函数 $t\to u(t)$，满足

(4.3) $(u''(t),v)+a(u(t),v)=(\psi(t),v),\ \forall v\in V_0$

其中

(4.4)
$$(\psi(t),v)=(f(t),v)+\int_{\Gamma_F}F(t)v\,d\Gamma+(\Phi''(t),v)+a(\Phi(t),v)$$

和初条件

(4.5) $u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1$

我们引入

(4.6) $H=(L^2(\Omega))^3$

注意

(4.7) $V_0\subset H$，V_0 在H中稠密

用$\|\ \|$(相应地$|\ |$)表示 V_0(相应地 H) 中的范数，用$(,)$表示H中的内积。

我们把H和其对偶等同，于是

(4.8) $H\subset V_0',V_0'$ 是 V_0 的对偶

用 $(,)$ 表示 V_0' 和 V_0 之间的对偶，它与H上的内积是相容

1) 下面明确依赖于 t 的方式。

的。

用$\|\ \|_*$表示 V_0' 上的$\|\ \|$的对偶范数，即

$$\|f\|_* = \operatorname{Sup}|(f, v)|, \quad v \in V_0, \quad \|v\| \leqslant 1$$

往证

定理 4.1 假定

$$\Psi, \Psi' \in L^2(0, T; V_0')^{1)} \tag{4.9}$$

$$u_0 \in V_0, u_1 \in H \tag{4.10}$$

则有且仅有一个函数 u 满足

$$u \in L^\infty(0, T; V_0) \tag{4.11}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H) \tag{4.12}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; V_0') \tag{4.13}$$

并满足(4.3)，(4.5)。

注 4.1 假定

(4.14) $f_i, \partial f_i/\partial t \in L^2(Q), Q = \Omega \times]0, T[$,

(4.15) $F_i, \partial F_i/\partial t \in L^2(\Sigma), \Sigma = \Gamma \times]0, T[$

(4.16) U_i是$\tilde{U}_i$在$\Gamma_U \times]0, T[$ 上的限制，这里 $\tilde{U}_i$ 满足:

$$\tilde{U}_i, \partial\tilde{U}_i/\partial t, \partial^2\tilde{U}_i/\partial t^2, \partial^3\tilde{U}_i/\partial t^3 \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$$

则可这样选择 Φ，使得由(4.4)定义的Ψ满足(4.9)。

事实上，可选 Φ，满足

$$\Phi, \cdots, \Phi''' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3)^{2)} \tag{4.17}$$

现证明 $\Psi' \in L^2(0, T; V_0')$。我们有

$$(\Psi'(t), v) = (f'(t), v) + \int_{\Gamma_F} F'(t) v d\Gamma + (\Phi'''(t), v) + a(\Phi'(t), v)$$

由此

$$|(\Psi'(t), v)| \leqslant c_1[|f'(t)||v| + \|F'(t)\|_{(L^2(\Gamma))^3}\|v\| + |\Phi'''(t)||v| + \|\Phi'(t)\|\|v\|]$$

---

1) 此式成立的充分条件在注 4.1 中指出。

2) 可放宽对 U 的条件，只需保证 Φ 满足 $\Phi, \Phi' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3)$，$\Phi'', \Phi''' \in L^2(0, T; H)$。

从而

$$\|\Psi'(t)\|_* \leqslant c_2[\,|f'(t)| + \|F'(t)\|_{(L^2(\Gamma))^3} + \|\Phi'(t)\| + |\Phi''(t)|\,]$$

即得结果.

注 4.2 根据第 3 节所述,我们有

(4.18) $$a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in V_0$$

(4.19) $$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \forall v \in V, \alpha > 0, \text{若 } \Gamma_U \neq \varnothing$$

(4.20) $$\begin{cases} \forall \lambda > 0, \text{存在 } \alpha > 0, \text{使} \\ a(v, v) + \lambda|v^2| \geqslant \alpha\|v\|^2, \forall v \in V, \text{当} \\ \qquad \Gamma_U = \varnothing (V_0 = V) \text{时} \end{cases}$$

下面我们将在一个"抽象"模式下证明定理 4.1,其中仅涉及 V_0, H, V_0' 和满足(4.20)的 $a(u, v)$. □

注 4.3 在一些应用中(例如在不耦合温度的线性化了的热弹性中)可能遇到 a_{ijkh} 是 x 和 t 的函数的情形:

$$a_{ijkh} = a_{ijkh}(x, t)$$

于是要考虑一个 V_0 上依赖于 t 的连续双线性型 $a(t; u, v)$,定理 4.1 成立(以类似的方式证明)只要

(4.21) $$a(t; u, v) = a(t; v, u), \forall u, v \in V_0$$

(4.22) $$\begin{cases} \text{存在 } \lambda > 0 \text{ 使} \\ a(t; u, v) + \lambda|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2, \alpha > 0, \\ \qquad \forall v \in V_0, \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

(4.23) $\forall u, v \in V_0$, 函数 $t \to a(t; u, v)$ 在 $[0, T]$ 上一次连续可微. □

注 4.4 $\Gamma_U = \varnothing$ 的情形. 在定理 4.1 的叙述中,表现不出当 $\Gamma_U = \varnothing$ 时以下两种情形的区别: 其一是 $\forall t$, 力 $f_i(t)$ 和 $F_i(t)$ 组成一等价于零的转矩,即有

(4.24) $$(f(t), \rho) + \int_{\Gamma_F} F_i(t)\rho_i d\Gamma = 0, \forall \rho \in \mathscr{R}$$

其二是(4.24)不成立.

我们更细致地考察这两种情形.

i) (4.24) 成立. 这时可按下列方式使解的结构性质更明

确[1]:

(4.25) $$u(t)=u_0+tu_1+w(t)$$

这里 w 满足

(4.26) $$(w(t),\rho)=0,\ \forall\rho\in\mathscr{R}$$

事实上,把(4.25)定义的 $w(t)$ 代入(4.3)即得

(4.27) $$(w''(t),v)+a(u_0+tu_1+w(t),v)$$
$$=(f(t),v)+\int_{\Gamma_F}F(t)vd\Gamma$$

(因 $\Gamma_U=\varnothing$, 故 $\Phi(t)=0$).

在(4.27)中取 $v=\rho\in\mathscr{R}$, 由于 $a(u(t),\rho)=0$ 和(4.24),即得

$$(w''(t),\rho)=0$$

这一等式与 $w(0)=0$, $w'(0)=0$ 结合则证明了(4.26).

现考察第二种情形:

ii) 关系(4.24)不成立.

在这种情形,作用在弹性体上的力引起一个刚体运动,而弹性形变叠加其上. 因而运动是大幅度的,线性化不再合理. 定理 4.1 固然正确,但模型不再适用. 这时应首先确定刚体运动,然后在这一运动的坐标系内处理弹性形变问题,此时线性化是合理的,但要在力 f_i 和 F_i 以外增加牵连惯性力和附加力 $\mathscr{F}$. 于是力 $f(t)$, $F(t)$ 和 $\mathscr{F}(t)$ 的集合在各个时刻就是一个等价于零的转矩,这就归结为情形 i). □

4.2 定理 4.1 的证明

为证定理 4.1 中解的存在性,我们用类似于第一章 5.6.1 的方法.

空间 V_0 是可分的[2]. 于是可选取一个序列 $w_1,\cdots,w_m,\cdots$, 对任意 m, $w_1,\cdots,w_m$ 它是线性无关的,且 w_i 的有限线性组合

1) 假定 $u_1\in V(=V_0)$, 否则要利用一个比(4.25)中的 u_0+tu_1 更复杂的"提升"

2) 在"抽象"情形这是一个(非本质的!)条件.

在 V_0 中稠密．此外，还假定

$$w_1 = u_0 \text{（当 } u_0 \neq 0 \text{ 时）}$$

定义"m 阶的近似解"如下：

$$(4.28)\quad \begin{cases} u_m(t) \in [w_1, \cdots, w_m] = w_1, \cdots, w_m \text{所张的空间} \\ (u_m''(t), v) + a(u_m(t), v) = (\varPsi(t), v), \\ \qquad \forall v \in [w_1, \cdots, w_m] \\ u_m(0) = u_0 \\ u_m'(0) = u_{1m}, u_{1m} \in [w_1, \cdots, w_m], u_{1m} \to u_1, \\ \qquad (\text{当 } m \to \infty \quad \text{在} H \text{中}) \end{cases}$$

(4.28)是 m 个未知函数的线性二阶常微分方程组．因为 $w_1, \cdots, w_m$ 线性无关，故这个方程组非奇异；于是(4.28)唯一决定了 u_m．

u_m 的先验估计．在(4.28)中取 $u = u_m'(t)$，这是允许的，即得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) = (\varPsi(t), u_m'(t))$$

由此

$$(4.29)\quad |u_m'(t)|^2 + a(u_m(t), u_m(t)) = |u_{1m}|^2 + a(u_0, u_0) + 2\int_0^t (\varPsi(\sigma), u_m'(\sigma))d\sigma = |u_{1m}|^2 + a(u_0, u_0) + 2(\varPsi(t), u_m(t)) - 2(\varPsi(0), u(0)) - 2\int_0^t (\varPsi'(\sigma), u_m(\sigma))d\sigma.$$

而用 c 表示不同常数时，

$$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 - c|v|^2$$

$$|u_{1m}| \leqslant c|u_1|$$

$$2|(\varPsi(t), u_m(t))| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\|u_m(t)\|^2 + c\|\varPsi(t)\|_*^2$$

于是(4.29)给出

$$(4.30)\quad |u_m'(t)|^2+\frac{1}{2}\alpha\|u_m(t)\|^2\leqslant c(|u_1|^2+\|u_0\|^2$$
$$+\|\Psi(0)\|_*^2)+c\|\Psi(t)\|_*^2+c|u_m(t)|^2$$
$$+c\int_0^t\|\Psi'(\sigma)\|_*\|u_m(\sigma)\|d\sigma$$

而

$$u_m(t)=u_0+\int_0^t u_m'(\sigma)d\sigma$$

给出

$$|u_m(t)|^2\leqslant 2|u_0|^2+c\int_0^t|u_m'(\sigma)|^2d\sigma$$

于是(4.30)给出

$$(4.31)\quad |u_m'(t)|^2+\|u_m(t)\|^2\leqslant c\Big(|u_1|^2+\|u_0\|^2$$
$$+\|\Psi(0)\|_*^2+\|\Psi(t)\|_*^2+\int_0^t\|\Psi'(\sigma)\|_*^2d\sigma\Big)$$
$$+c\int_0^t(|u_m'(\sigma)|^2+\|u_m(\sigma)\|^2)d\sigma$$

令

$$(4.32)\quad |||\Psi|||^2=\int_0^T(\|\Psi(t)\|_*^2+\|\Psi'(t)\|_*^2)dt+\|\Psi(0)\|_*^2$$

$$(4.33)\quad \varphi_m(t)=|u_m'(t)|^2+\|u_m(t)\|^2$$

于是(4.31)给出

$$(4.34)\quad \varphi_m(t)\leqslant c(|u_1|^2+\|u_0\|^2+|||\Psi|||^2)+c\int_0^t\varphi_m(\sigma)d\sigma$$

根据 Gronwall 不等式

$$(4.35)\quad \varphi_m(t)\leqslant c(|u_1|^2+\|u_0\|^2+|||\Psi|||^2)\exp(ct)$$

结论

(4.36) u_m（相应地，u_m'）在 $L^\infty(\sigma,T;V_0)$（相应地，$L^\infty(0,T;H)$）中有界（当 $m\to\infty$ 时）。□

于是由(4.36)推出，可从 u_m 取子序列 u_μ:

(4.37) $\begin{cases} u_\mu \text{（相应地，} u'_\mu\text{）} \to u \text{（相应地，} u'\text{），在} \\ L^\infty(0, T; V_0) \text{（相应地，} L^\infty(0, T; H)\text{）中弱}^{*} \end{cases}$[1]。

现证 u 是问题的解。引入 φ 的空间 E，满足

(4.38) $$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\mu_0} \varphi_j(t) w_j, \quad \varphi_j \in C^1([0, T]),$$

$$\varphi_j(T) = 0, \quad \mu_0 \text{ 任意有限}$$

由(4.28)推出对 $m = \mu \geqslant \mu_0$

$$(u''_\mu, \varphi) + a(u_\mu, \varphi) - (\Psi, \varphi) = 0, \varphi \text{ 由(4.38)给定}$$

由此

(4.39) $$\int_0^T [-(u'_\mu, \varphi') + a(u_\mu, \varphi) - (\Psi, \varphi)] dt = (u_{1\mu}, \varphi(0))$$

在(4.39)对 μ 取极限，由此有，$\forall \varphi \in E$：

(4.40) $$\int_0^T [-(u', \varphi') + a(u, \varphi) - (\Psi, \varphi)] dt = (u_1, \varphi(0))$$

由于 w_j 的有限线性组合在 V_0 中稠密，(4.40)对任意满足如下条件的 φ 皆成立

$$\varphi \in C^1([0, T]; V_0), \quad \varphi(T) = 0.$$

由此推出，在 $]0, T[$ 上，取值在 V_0 中的广义函数的意义下

(4.41) $$u'' + Au = \Psi,$$

其中 $A \in \mathscr{L}(V_0; V'_0)$ 定义如下：

(4.42) $$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in V_0$$

于是 $u'' = \Psi - Au \in L^\infty(0, T; V'_0)$[2]。在(4.41)两端取与 $\varphi \in E$（比方说）的内积并与(4.40)比较，即得

$$(u_1, \varphi(0)) = (u'(0), \varphi(0)), \quad \forall \varphi \in E$$

由此 $u'(0) = u_1$。由(4.37)得出 $u_\mu(0) = u_0 \to u(0)$（在 H 中弱），

---

1) 即，例如 $L^\infty(0, T; V_0)$ 中弱*收敛，意指

$$\int_0^T ((u_\mu, \varphi)) dt \to \int_0^T ((u, \varphi)) dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; V_0).$$

2) 因为条件(4.9)蕴含

$$\Psi \in C^0([0, T]; V'_0) \subset L^\infty(0, T; V'_0).$$

即得 $u(0)=u_0$，故 u 满足定理 4.1 的条件. □

现证解的唯一性[1]. 设 u 满足(4.11),(4.12),(4.13)和

(4.43) $$u''+Au=0,\ u(0)=0,\ u'(0)=0$$

对 $\varphi\in C^1([0,T];V_0')$（譬如说），由证明的第一部分[2]知，存在函数 w，使

(4.44) $$w\in L^\infty(0,T;V_0),\ w'\in L^\infty(0,T;H),$$
$$w''\in L^\infty(0,T;V_0')$$

(4.45) $$w''+Aw=\varphi$$

(4.46) $$w(T)=0,\ w'(T)=0$$

下列分部积分是允许的:

(4.47) $$\int_0^T(u'',w)dt=\int_0^T(u,w'')dt$$

因此在(4,43)两端取与 w 的内积，并利用(4.47)(由于 $a(u,v)=a(v,u),\forall u,v$) 即得

$$\int_0^T(u,w''+Aw)dt=0$$

即

$$\int_0^T(u,\varphi)dt=0,\forall\varphi\in C^1([0,T];V_0'),\text{故 } u=0.\ \square$$

4.3 其它边条件

我们考虑前面研究的边值问题的一些变形

4.3.1 变形 1（例如在一刚性支承上的物体）

要求方程

(4.48) $$\partial^2u/\partial t^2+Au=f,\ Q\text{ 内}$$

的解 u，它满足边条件

(4.49) $$\sigma_{ij}n_j=F_i,\ i=1,2,\Gamma\times]0,T[=\Sigma\text{ 上},$$

(4.50) $$u_3=0,\ \Sigma\text{ 上}.$$

自然还满足初条件(4.5).

---

1) 这个证明属 L. Tartar.

2) t 换以 $T-t$.

这个问题的力学解释如下：在边界 Γ 上给定力的面密度的前两个分量 F_1 和 F_2 及位移的第三个分量 u_3。这类边条件，比方说，出现在下列问题中：具有一部分平面边界的弹性体（例如由一个赤道平面所界的半球）无摩擦地放在一个水平平面上。若假定当变形时，它从不脱离这平面，在平面边界部分的边条件是 (4.49)，(4.50)，而在其余边界部分有 $F_i = 0$，$i = 1, 2, 3$。 □

相应的静态问题是

(4.51)
$$Au = f$$

和(4.49)，(4.50) □

为给出变分提法，我们引入

(4.52)
$$V_1 = \{v | v \in V = (H^1(\Omega))^3, \text{在 } \Gamma \text{ 上 } v_3 = 0\}$$

不难验证，这时动态(相应地，静态问题)等价于求下列方程的解 $u = u(t)$，

(4.53)
$$(u''(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) + \int_\Gamma [F_1(t)v_1 + F_2(t)v_2] d\Gamma, \quad \forall v \in V_1$$

它满足

(4.54) $u \in L^\infty(0, T; V_1)$, $u' \in L^\infty(0, T; H)$, $u'' \in L^\infty(0, T; V_1')$

和(4.5)。(相应地，求下列方程的解 $u \in V_1$)

(4.55)
$$a(u, v) = (f, v) + \int_\Gamma [F_1 v_1 + F_2 v_2] d\Gamma, \forall v \in V_1$$

为解这些问题，注意 $a(u, v)$ 在 V_1 上不是强制的，因为

(4.56)
$$a(v, v) = 0, \quad v \in V_1, \quad v \in \mathscr{R}_1$$

其中

(4.57)
$$\mathscr{R}_1 = \{\rho | \rho \in \mathscr{R}, \text{在 } \Gamma \text{ 上 } \rho_3 = 0\}$$

而对静态问题引入

$$\dot{V}_1 = V_1 / \mathscr{R}_1$$

$$a(u^\cdot, v^\cdot) = a(u, v), u \in u^\cdot, v \in v^\cdot, u^\cdot, v^\cdot \in \dot{V}_1$$

问题(4.55)仅当

(4.58) $$(f, \rho) + \int_\Gamma [F_1\rho_1 + F_2\rho_2] d\Gamma = 0, \forall \rho \in \mathscr{R}_1$$

时才可能有解。(4.58)的力学解释是：体积力 $(f_1, f_2, 0)$ 和表面力 $(F_1, F_2, 0)$ 的转矩等价于零。

于是如在 3.4.2 中一样，可验证，如(4.58)成立，静态问题(4.55)有解，并且在允许相差一个 $\mathscr{R}_1$ 中的元素的意义下是唯一的。

对于动态问题，由于 $\forall \lambda > 0$，存在 $\alpha > 0$ 使

$$a(v, v) + \lambda |v|^2 \geqslant \alpha \|v\|^2, \forall v \in V_1$$

可以利用定理 4.1，这就证明了 (4.53)，(4.54)，(4.55) 解的存在性和唯一性。

若 $\forall t \in [0, T]$，有

(4.59) $$(f(t), \rho) + \int_\Gamma [F_1(t)\rho_1 + F_2(t)\rho_2] d\Gamma = 0, \forall \rho \in \mathscr{R}_1$$

则当假设 $u_1 \in V_1$ 时有

(4.60) $$u(t) = u_0 + tu_1 + w(t)$$

其中

(4.61) $$(w(t), \rho) = 0, \forall \rho \in \mathscr{R}_1$$

证明与注 4.4 相同。

若 (4.59) 不成立，与注 4.4 一样，模型不再适用，必须作如注 4.4ii) 中所指出的类似的修改。 □

4.3.2 变形 2（物体放在一个弹性外壳内）

我们要求(4.48)满足下列边条件的解 u：

(4.62) $$\sigma_T = 0, \ \Sigma \text{ 上}^{1)},$$

(4.63) $$\sigma_N + ku_N = 0 \ (k > 0), \Sigma \text{ 上}$$

它还满足初条件(4.5)；静态情形对应于(4.51)和(4.62)，(4.63)。

(4.62)和(4.63)的力学解释如下： Γ 上点的切向位移自由发生，而法向力是弹性恢复力，其绝对值正比于法向位移。这类边条件可在下列情形出现：物体和其他物体的弹性接触或物体在一弹

1) 用注 2.5 中的记号。

性壳体内。

变分提法．不难验证静态问题等价于求解 u，使

$$u \in V = (H^1(\Omega))^3$$

(4.64) $$a_1(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V$$

其中

(4.65) $$a_1(u, v) = a(u, v) + k\int_\Gamma u_N v_N d\Gamma$$

动态问题等价于求解 $u = u(t)$

(4.66) $$(u''(t), v) + a_1(u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V$$

(4.67) $$u \in L^\infty(0, T; V),\ u' \in L^\infty(0, T; H),\ u'' \in L^\infty(0, T; V')$$

u 还满足(4.5)．

为解这些问题,我们证明

定理 4.2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 的开集，$a_1(u, v)$ 由(4.65)定义,我们有

(4.68) $$a_1(v, v) \geqslant \alpha_1\|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

证明．一切归结为证明（保留已经用过的记号 $\varepsilon(v) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx$）

(4.69) $$\varepsilon(v) + \int_\Gamma v_N^2 d\Gamma \geqslant c|v|^2$$

v 代以 $v|v|^{-1}$，一切归结为证明

(4.70) $$\varepsilon(v) + \int_\Gamma v_N^2 d\Gamma \geqslant c > 0, \quad |v| = 1, \quad v \in V$$

假定(4.70)不真,则存在序列 v_α 使

(4.71) $$v_\alpha \in V,\ |v_\alpha| = 1,\ \varepsilon(v_\alpha) + \int_\Gamma v_{\alpha N}^2 d\Gamma \to 0$$

于是 $\|v_\alpha\| \leqslant C$，从而可取序列 v_α，使

(4.72) $$v_\alpha \to v, \quad \text{在 } V \text{ 中弱}$$

而单射 $V \to (L^2(\Omega))^3$ 是紧的,故有

(4.73) $$v_\alpha \to v, \quad \text{在 } (L^2(\Omega))^3 \text{ 中强}$$

但

$$\liminf[\varepsilon(v_\alpha)+\int_\Gamma v_{\alpha N}^2 d\Gamma]=0\geqslant\varepsilon(v)+\int_\Gamma v_N^2 d\Gamma$$

于是 $\varepsilon(v)=0$ 且于 Γ 上 $v_N=0$。从而 $v\in\mathscr{R}$，设 $v=a+b\wedge x$，而 $v_N=0$ 等价于在 Γ 上 $an+(b\wedge x)n=0$，这是不可能的（Γ 不可能是一个平面）。从而 $v=0$，因此（4.73）等价于 $|v_\alpha|\to 0$，这是荒谬的，因为

$$|v_\alpha|=1,\ \forall\alpha\ \square$$

由定理 4.2 和前面的结果立得

推论 4.1 动态问题(4.66)，(4.67)，(4.5)(相应地，静态问题(4.64))有唯一解。□

5. 带摩擦或单侧约束的线性弹性

5.1 摩擦的首批定律．动态情形

指南　本节我们考虑线性弹性体的形变，其边界可能服从前面研究过的类型的经典边条件，但还(至少在一部分边界上)服从摩擦条件。

作为开始，我们采用 Coulomb 定律(见5.1.1)，其它定律在 5.4 中研究。

5.1.1 Coulomb 定律

考虑在 C 接触的两个弹性物体 S_1 和 S_2（见图15），S_1 在 C

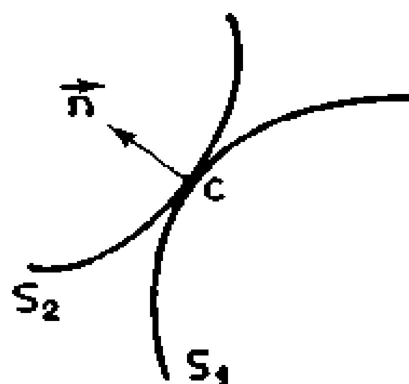


图 15

的单位外法线是 $\mathbf{n}$. 设 S_2 在 C 作用于 S_1 上的力是 $\mathbf{F}$（如涉及在 C 周围的一区域的接触，则是力密度）. 分解 $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = F_N\mathbf{n} + \mathbf{F}_T, \quad F_N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \tag{5.1}$$

此外，设正数值系数为 $\mathscr{F} = \mathscr{F}(C)$，称为在 C 点的摩擦系数（自然它依赖于 S_1 和 S_2 在 C 点的边界性质）.

必须区别在 C 的两类接触:

i) **双侧接触**，即不论力沿何方向，接触总保持；

ii) **单侧接触**，即仅当力由一物体作用在另一物体上时接触才保持.

现在分别叙述两种情形下的 Coulomb 定律，

(5.2)
（双侧接触下的 Coulomb 定律）
在时刻 t,
$|\mathbf{F}_T(C)| < \mathscr{F}(C)|F_N(C)| \Rightarrow \partial\,\mathbf{u}_T(C)/\partial t = 0$[1]
$|\mathbf{F}_T(C)| = \mathscr{F}(C)|F_N(C)| \Rightarrow$ 存在 $\lambda \geqslant 0$ 使
$\partial\,\mathbf{u}_T(C)/\partial t = -\lambda\mathbf{F}_T(C)$

(5.3)
（单侧接触下的 Coulomb 定律）
应有 $F_N(C) \leqslant 0$ 且
$|\mathbf{F}_T(C)| < -\mathscr{F}(C)F_N(C) \Rightarrow \partial\,\mathbf{u}_T(C)/\partial t = 0$
$|\mathbf{F}_T(C)| = -\mathscr{F}(C)F_N(C) \Rightarrow$ 存在 $\lambda \geqslant 0$ 使
$\partial\,\mathbf{u}_T/\partial t = -\lambda\mathbf{F}_T$ □

注 5.1 在双侧接触的情形同样可考虑视 $F_N(C) < 0$ 或 $F_N(C) > 0$ 而把摩擦系数 $\mathscr{F}(C)$ 设为 $\mathscr{F}_1(C)$, $\mathscr{F}_2(C)$，这时该定律是[2]

---

1) 象 $\mathbf{F}$ 一样分解 $\mathbf{u}(C)$, $\mathbf{u}(C) = u_N(C)\mathbf{n} + \mathbf{u}_T(C)$.
2) $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$.

$$
(5.4)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} |\mathbf{F}_T(C)| < \mathscr{F}_1(C)F_N(C)^- \\ \text{或} \\ |\mathbf{F}_T(C)| > \mathscr{F}_2(C)F_N(C)^+ \end{array}\right\} \partial \mathbf{u}_T(C)/\partial t = 0 \\ |\mathbf{F}_T(C)| = \mathscr{F}_1(C)F_N(C)^- \Rightarrow \text{存在 } \lambda_1 \geqslant 0 \text{ 使} \\ \qquad\qquad \partial_2 \mathbf{u}_T(C)/\partial t = -\lambda_1 \mathbf{F}_T(C) \\ |\mathbf{F}_T(C)| = \mathscr{F}_2(C)F_N(C)^+ \Rightarrow \text{存在 } \lambda_2 \geqslant 0 \text{ 使} \\ \qquad\qquad \partial \mathbf{u}_T(C)/\partial t = -\lambda_2 \mathbf{F}_T(C) \end{cases}
$$

在以后的讨论中，这一变形只引起微小的修改，见注 5.2. □

5.1.2 待考虑的问题

Ω（所考虑的弹性体）的边界 Γ 的一部分 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 服从摩擦条件。

相补部分 $\Gamma - \Gamma_{\mathscr{F}}$ 服从古典型的条件，比方说给定的力或位移。

为简化叙述，我们将假定在 $\Gamma - \Gamma_{\mathscr{F}}$ 上位移给定（在 $\Gamma - \Gamma_{\mathscr{F}}$ 的一部分上给定位移，在其余部分上给定力，除书写外没有任何困难）。令

$$
(5.5)\qquad \Gamma - \Gamma_{\mathscr{F}} = \Gamma_U
$$

用 $u = u(x, t)$ 记（我们要找的）位移场，Γ_U 上的边条件是

$$
(5.6)\qquad u_i = U_i,\ \text{在 } \Sigma_U = \Gamma_U \times]0, T[\ \text{上}.
$$

在 $\Sigma_{\mathscr{F}} = \Gamma_{\mathscr{F}} \times]0, T[$ 上法向应力给定，即

$$
(5.7)\qquad \sigma_N = F_N,\ \text{在 } \Sigma_{\mathscr{F}} \text{ 上}^{1)},
$$

而在双侧接触情形（见 (5.2)）

$$
(5.8)\quad \begin{cases} |\sigma_T| < \mathscr{F}(x)|F_N| \Rightarrow \partial \mathbf{u}_T/\partial t = 0 \\ |\sigma_T| = \mathscr{F}(x)|F_N| \Rightarrow \text{存在 } \lambda \geqslant 0 \text{ 使} \\ \qquad\qquad \partial \mathbf{u}_T/\partial t = -\lambda \sigma_T \end{cases}
$$

其中 $x \in \Gamma_{\mathscr{F}}$，$\mathscr{F}(x)$ = 在点 x 的摩擦系数；设函数 $x \to \mathscr{F}(x)$ 在 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 上有界可测且

$$
(5.9)\qquad \mathscr{F}(x) \geqslant \mathscr{F}_0 > 0,\ x \in \Gamma_{\mathscr{F}}
$$

---

1) 假定 F_N 在 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 上有界可测．为简化叙述，假定 F_N 不依赖时间，但也可考虑 F_N 依赖 t 的情形．

为简化书写，令

(5.10) $$\mathscr{F}|F_N| = g,\ g \in L^\infty(\Gamma_g)$$

问题归结为

问题5.1（带摩擦的动态问题） 求位移场 $u = u(x,t)$，满足方程

(5.11) $$\begin{cases} \partial^2 u_i/\partial t^2 = \sigma_{ij,j} + f_i, & \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) \end{cases}$$

与边条件

(5.12) $$u_i = U_i,\ \text{在 } \Gamma_U \times]0, T[= \Sigma_U \text{ 上}$$

和

(5.13) $$\begin{cases} \sigma_N = F_N,\ \text{在 } \Sigma_g = \Gamma_g \times]0, T[\text{ 上} \\ |\sigma_T| < g \Rightarrow \partial u_T/\partial t = 0 \\ |\sigma_T| = g \Rightarrow \text{存在 } \lambda \geqslant 0 \text{ 使 } \partial u_T/\partial t = -\lambda\sigma_T \end{cases}$$

及初条件

(5.14) $$u(x,0) = u_0(x),\ \partial u(x,0)/\partial t = u_1(x),\ x \in \Omega$$ □

注 5.2 在按 F_N 的方向而有不同的系数的双侧接触情形（见注 5.1），我们得到下列问题：求 u（和 σ），满足(5.11)，(5.12)（条件(5.14)不变），而代替(5.13)的是

(5.15) $$\sigma_N = F_N,\ \Sigma_g \text{ 上}$$

(5.16) $$\begin{cases} \left.\begin{matrix} |\sigma_T| < \mathscr{F}_1 F_N^- \\ \text{或} \\ |\sigma_T| < \mathscr{F}_2 F_N^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \partial u_T/\partial t = 0 \\ \sigma_T = \mathscr{F}_1 F_N^- \Rightarrow \text{存在 } \lambda_1 \geqslant 0 \text{ 使 } \partial u_T/\partial t = -\lambda_1\sigma_T \\ \sigma_T = \mathscr{F}_2 F_N^+ \Rightarrow \text{存在 } \lambda_2 \geqslant 0 \text{ 使 } \partial u_T/\partial t = -\lambda_2\sigma_T \end{cases}$$ □

注 5.3 在单侧情形，若在所有的点 $x \in \Gamma$：$F_N < 0$，那末(5.13)取消．反之，若在某些点 $F_N = 0$，引起摩擦的接触中止这时得到“带摩擦的 Signorini”型问题（见 5.4.5）□

指南．我们现在要考虑伴随类似于上述摩擦定律的静态问

题，尔后提供解静态问题所需之工具。

再后，考察摩擦的其它定律，以便最终回到动态情形。

5.2 Coulomb 定律，静态情形

5.2.1 待考虑的问题

对应问题 5.1 的静态问题如下：

问题 5.2 求位移场 $u = u(x)$，满足

$$\text{(5.17)} \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u), \quad \Omega \text{内} \end{cases}$$

$$\text{(5.18)} \quad u_i = U_i, \quad \Gamma_U \text{ 上}$$

$$\text{(5.19)} \quad \begin{cases} \sigma_N = F_N, \quad \Gamma_g \text{ 上} \\ |\sigma_T| < g \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = g \Rightarrow \text{存在 } \lambda \geq 0 \text{ 使 } u_T = -\lambda\sigma_T \quad \square \end{cases}$$

注5.4 注 5.2 的情况在静态问题中的类似情况是下列问题，求满足 (5.17)，(5.18)的 u，并用下列条件代替(5.19)：

$$\text{(5.20)} \quad \sigma_N = F_N, \quad \Gamma_g \text{ 上}$$

$$\text{(5.21)} \quad \begin{cases} \left.\begin{matrix} |\sigma_T| < \mathscr{F}_1 F_N^- \\ \text{或} \\ |\sigma_T| < \mathscr{F}_2 F_N^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = \mathscr{F}_1 F_N^- \Rightarrow \exists\lambda_1 \geq 0, \text{ 使 } u_T = -\lambda_1\sigma_T \\ |\sigma_T| = \mathscr{F}_2 F_N^+ \Rightarrow \exists\lambda_2 \geq 0 \text{ 使 } u_T = -\lambda_2\sigma_T \quad \square \end{cases}$$

注 5.5 注5.3所考虑的情况在静态问题中的类似情形是：若在 Γ 的所有点 $F_N < 0$，则(5.19)成立。

5.2.2 变分提法

沿用 2.3 的记号。另外引入泛函

$$\text{(5.22)} \quad j(v) = \int_{\Gamma_g} g(x)|v_T(x)|d\Gamma$$

这是一个在 $V = (H^1(\Omega))^3$ 上连续、凸、不可微泛函。

我们将证明问题 5,2 “等价于”[1]下列问题：

---

1) 等价是形式的，因为在问题 5.2 中尚未明确在什么样的函数类中求解 u。

问题5.3　求u满足

$$(5.23)\qquad u=U,\ \Gamma_U\ 上$$

$$(5.24)\qquad \begin{cases} a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant(f,v-u) \\ \qquad +\int_{\Gamma_g}F_N(v_N-u_N)d\Gamma \\ \forall v\in V,\ 在\ \Gamma_U\ 上\ v=U \end{cases}$$

事实上,若(5.19)成立,则

$$(5.25)\qquad \sigma_T(v_T-u_T)+g(|v_T|-|u_T|)\geqslant 0,\ \Gamma_g上$$

取(5.17)与$v-u$的内积并利用 Green 公式(2.33),则有

$$(5.26)\qquad a(u,v-u)-\int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T-u_T) + \sigma_N(v_N-u_N)]d\Gamma - \int_{\Gamma_U}\sigma(v-u)d\Gamma=(f,v-u)$$

而在Γ_g上$\sigma_N=F_N$,在Γ_U上$v=u=U$,故

$$a(u,v-u)-(f,v-u)-\int_{\Gamma_g}F_N(v_N-u_N)d\Gamma = \int_{\Gamma_g}\sigma_T(v_T-u_T)d\Gamma$$

由此

$$a(u,v-u)+j(v)-j(u)-(f,v-u) - \int_{\Gamma_g}F_N(v_N-u_N)d\Gamma = \int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T-u_T)+g|v_T|-g|u_T|]d\Gamma\geqslant 0$$

根据(5.25),由此得(5.24).

反之,设u满足(5.23),(5.24),则首先取$v=u\pm\varphi$,$\varphi\in(\mathscr{D}(\Omega))^3$,即得$Au=f$,由此(5,17)成立,从而得(5.26)(形式地利用 Green 公式,这可象在 Lions-Magenes [1]第1卷第2章中那样来验证;此外实行形式上的计算没有任何逻辑困难,因为我们后面取问题5.3的叙述作为解的定义).

由于(5.26),且在Γ_U上$v=u=U$,(5.24)即给出:

$$(5.27)\quad \int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T-u_T)+g(|v_T|-|u_T|)]d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_g}(\sigma_N-F_N)(v_N-u_N)d\Gamma\geqslant 0$$

$$\forall v\in(H^1(\Omega))^3,\text{在 } \Gamma_U \text{ 上 } v=U$$

注意当 v 遍历 $(H^1(\Omega))^3$ 时，v_N 遍历 $H^{1/2}(\Gamma)$ 而 v_T 遍历 $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ 满足 $nv_T=0$ 的子空间。

于是可在(5.27)中取 $v_T=u_T,v_N=H^{1/2}(\Gamma)$ 中的支集在 Γ_g[1] 内的任意函数，由此

$$\sigma_N=F_N$$

这样(5.27)化为

$$(5.28)\quad \int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T-u_T)+g(|v_T|-|u_T|)]d\Gamma\geqslant 0$$

设

(5.29) $\Psi=$ 支集在 Γ_g 内部的函数 $\psi\in(H^{1/2}(\Gamma))^3$ 的空间。

若 $\psi\in\Psi$，则把它分解为

$$\psi=\psi_N n+\psi_T,\ \psi_N=n\psi$$

并且在(5.28)中令 $v_T=\psi_T$. 而由于 $\sigma_T n=0$，我们有

$$\sigma_T\psi_T=\sigma_T\psi$$

于是(5.28)给出

$$(5.30)\quad \int_{\Gamma_g}[\sigma_T\psi+g|\psi_T|]d\Gamma-\int_{\Gamma_g}[\sigma_T u_T+g|u_T|]d\Gamma\geqslant 0$$

由于 $|\psi_T|\leqslant|\psi|$，则由(5.30)推出

$$(5.31)\quad \int_{\Gamma_g}[\sigma_T\psi+g|\psi|]d\Gamma-\int_{\Gamma_g}[\sigma_T u_T+g|u_T|]d\Gamma\geqslant 0,\ \forall\psi\in\Psi$$

在上式中，ψ 代以 $\pm\ \lambda\psi$，$\lambda\geqslant 0$，即得

1) 假定 Γ_g 在 Γ 中的边界是正则的。

$$\lambda \int_{\Gamma_g} [\pm \sigma_T \phi + g|\phi|] d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g|u_T|] d\Gamma \geqslant 0, \ \forall \lambda \geqslant 0$$

由此

$$\int_{\Gamma_g} [\pm \sigma_T \phi + g|\phi|] d\Gamma \geqslant 0$$

即

$$\left| \int_{\Gamma_g} \sigma_T \phi d\Gamma \right| \leqslant \int_{\Gamma_g} g|\phi| d\Gamma, \ \forall \phi \in \Psi \tag{5.32}$$

且

$$\int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g|u_T|] d\Gamma \leqslant 0 \tag{5.33}$$

但(5.32)表明

$$\phi \to \int_{\Gamma_g} \sigma_T \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_g} (g^{-1}\sigma_T) g \phi d\Gamma$$

在Ψ上连续，Ψ具有由 $(L^1(\Gamma_g))^3$ 诱导的拓扑，$(L^1(\Gamma_g))^3$ 上的范数是

$$\int_{\Gamma_g} g|\phi| d\Gamma$$

而该形式的范数$\leqslant 1$。由于Ψ在 $(L^1(\Gamma_g))^3$ 中稠密，于是

$$g^{-1}\sigma_T \in (L^\infty(\Gamma_g))^3, \text{ 且范数} \leqslant 1$$

即

$$|\sigma_T| \leqslant g, \ \text{p. p. 于 } \Gamma_g \tag{5.34}$$

于是 $\sigma_T u_T + g|u_T| \geqslant 0$，这与(5.33)结合证明了

$$\sigma_T u_T + g|u_T| = 0, \ \text{p. p. 于 } \Gamma_g \text{ 上} \tag{5.35}$$

而 (5.34),(5.35) 等价于(5.19)的后两个条件，由此得到所要的等价性.

以后取问题 5.3 的表述作为问题的定义：这是带摩擦的静态问题在变分不等方程形式下的提法，这里摩擦是服从 Coulomb 定律且是双侧接触的. □

注 5.6 当然，上面所说的一切当 $\Gamma_U = \varnothing$ 时亦有效 .□

注 5.7 若在 Γ_g 上 $g=0$，(5.24) 就化为

$$a(u, v-u)=(f, v-u)+\int_{\Gamma_g} F_N(v_N-u_N)d\Gamma \tag{5.36}$$

对应的问题属于第 3 节中研究过的类型:

$$Au=f \tag{5.37}$$

$$u=U, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上} \tag{5.38}$$

$$\sigma_N=F_N, \sigma_T=0 \text{ 在 } \Gamma_g=\Gamma-\Gamma_U \text{ 上} \square \tag{5.39}$$

注 5.8 要得到注 5.4 中的问题的变分提法,需要把 Γ_g 分解为

$$\Gamma_{g^+}, \text{ 在其上 } F_N \geqslant 0$$

和

$$F_{g^-}, \text{ 在其上 } F_N<0 \square$$

5.2.3 结果. Γ_U 测度为正的情形

注意，由于形式 $a(u, v)$ 是对称的，问题 5.3 等价于在集合 $\mathscr{U}_{ad}$ 上:

$$\mathscr{U}_{ad}=\{v \mid v \in V=(H^1(\Omega))^3, \text{在 } \Gamma_U \text{ 上 } v=U\} \tag{5.40}$$

求泛函

$$I(v)=\frac{1}{2} a(v, v)+j(v)-(f, v) -\int_{\Gamma_g} F_N v_N d\Gamma \tag{5.41}$$

的最小值. $I(v)$ 的表达式表示运动学允许场 v 的势能.

假设

$$F_N \in L^\infty(\Gamma_g)^{1)} \tag{5.42}$$

$$f \in L^2(\Omega) \tag{5.43}$$

则由于 $j(v) \geqslant 0$，推论 3.1 证明我们有

定理 5.1 问题 5.3 有唯一解. □

注 5.9（关于对 g 的依赖性） 为使人们注意到对 g 的依赖

---

1) 这可以推广.

性，我们记 $j_g(v)$ 以代替 $j(v)$，设 u_g 是(5.23)，(5.24)相应的解，则有

$$(5.44) \qquad \|u_{g_1} - u_{g_2}\| \leqslant c\|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_g)}.$$

事实上，在关于 u_{g_1}（相应地，u_{g_2}）的类似于(5.24)的不等方程中令 $v = u_{g_2}$（相应地，$v = u_{g_1}$），把所得到的不等式相加，令 $w = u_{g_1} - u_{g_2}$，则有

$$(5.45) \qquad -a(w, w) - \int_{\Gamma_g}(g_1 - g_2)(|u_{g_1}| - |u_{g_2}|)d\Gamma \geqslant 0$$

由于 $w \in V_0$（用(3.36)的记号），利用(3.37)即得

$$\alpha_0\|w\|^2 \leqslant \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_g)}\|u_{g_1} - u_{g_2}\|_{L^2(\Gamma_g)}$$

又由于 $\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_g)} \leqslant c\|\varphi\|$，由此推出(5.44)．于是，函数 $g \to u_g$ 在一定意义下(由(5.44)明确之)是 Lipschitz 连续的．

我们将证明，若在 $L^2(\Gamma_g)$ 中 $g \to 0$ 时，在 $(H^1(\Omega))^3$ 中 $u_g \to u$，则 u 是注 5.7 中所述问题的解．

5.2.4 结果．"$\Gamma_U = \varnothing$" 的情形

若 $\Gamma_U = \varnothing$，则问题成为：求 $u \in V = (H^1(\Omega))^3$，满足

$$(5.46) \qquad a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant (f, v-u) + \int_\Gamma F_N(v_N - u_N)d\Gamma, \quad \forall v \in V$$

在(5.46)中令 $v = 0$ 和 $v = 2u$，则有

$$(5.47) \qquad a(u, u) + j(u) = (f, u) + \int_\Gamma F_N u_N d\Gamma$$

因而(5.46)等价于(5.47)且

$$(5.48) \qquad a(u, v) + j(v) \geqslant (f, v) + \int_\Gamma F_N v_N d\Gamma, \quad \forall v \in V$$

把 v 换成 $-v$ 即有(5.46)等价于

$$(5.49) \qquad \left| \begin{aligned} & a(u, v) - (f, v) \\ & \qquad - \int_\Gamma F_N v_N d\Gamma \leqslant j(v), \quad \forall v \in V \\ & \text{当 } v = u \text{ 时等号成立.} \end{aligned} \right.$$

在(5.49)中取 $v = -\rho \in \mathscr{R}$，我们看到问题有解，必须有

(5.50) $$\left|(f, \rho) + \int_\Gamma F_N \rho_N d\Gamma\right| \leqslant j(\rho) = \int_\Gamma g|\rho_T| d\Gamma, \ \forall \rho \in \mathscr{R}$$

以下我们要在更强的假设下解决问题，要求在(5.50)中严格不等式成立，即

(5.51) $$\int_\Gamma g|\rho_T| d\Gamma - \left|(f, \rho) + \int_\Gamma F_N \rho_N d\Gamma\right| > 0,$$

$$\forall \rho \in \mathscr{R}, \quad \rho \neq 0$$

由于 $\mathscr{R}$ 是有限维的，这等价于存在 $c > 0$ 使

(5.52) $$\int_\Gamma g|\rho_T| d\Gamma - \left|(f, \rho) - \int_\Gamma F_N \rho_N d\Gamma\right| \geqslant c|\rho|^{1)}$$

我们有

定理 5.2 设 $\Gamma_U = \varnothing$ 且 (5.52) 成立，则存在 (5.46) 的解 $u \in V$，或等价地，u 使由 (5.41) ($\Gamma_g = \Gamma$) 定义的泛函 $I(v)$ 在 V 上取最小值。

证明. 函数 $v \to I(v)$ 在 V 上连续且为凸的；于是只需证明

(5.53) $$I(v) \to +\infty, \text{ 当 } \|v\| \to \infty \text{ 时。}$$

或令

(5.54) $w = v - Pv$, $Pv = V \to \mathscr{R}$ 的在 $(L^2(\Omega))^3$ 中的正交投影

(5.55) $$v = w + \rho, \ \rho \in \mathscr{R}$$

根据(3.52)，$\varepsilon(w) \geqslant c_1|w|^2$，从而

(5.56) $$a(w, w) \geqslant \alpha\|w\|^2, \ \alpha > 0$$

此外

$$\|v\|^2 = \varepsilon(v) + |v|^2 = \varepsilon(w) + |w|^2 + |\rho|^2$$

故有

(5.57) $\|v\|$ 是与 $\|w\| + |\rho|$ 等价的范数。

---

1) 其中象在前几节一样，$|f| = \|f\|_{(L^2(\Omega))^3} = \left(\int_\Omega f_i f_i dx\right)^{1/2}$.

我们有

$$
\begin{aligned}
I(v) = I(w+\rho) = \frac{1}{2}a(w, w) + j(w+\rho) \\
- (f, w) - \int_\Gamma F_N w_N d\Gamma - \left[(f, \rho) \right. \\
\left. - \int_\Gamma F_N \rho_N d\Gamma \right] \\
\geqslant \frac{1}{2}a(w,w) + j(w+\rho) - j(\rho) + r(\rho) \\
- (f, w) - \int_\Gamma F_N w_N d\Gamma \text{ 根据(5.52)} \\
\geqslant c(\|w\|^2 + |\rho|) - c\|w\|
\end{aligned}
$$

再根据(5.57),由此即得结果. □

(5.46)的解的唯一性问题尚未解决;在第一章第7节定理7.5我们已看到有某种类似的情形,那里可以得到唯一性的结论;但尚未能把该推理推广到目前的情形. 一个直接的注释如下:

设 u_1 和 u_2 是 (5.46) 的两个可能的解,在关于 u_1(相应地,u_2)的不等方程中令 $v = u_2$(相应地,$v = u_1$),相加即得

$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, 于是 $u_1 - u_2 \in \mathscr{R}$, 故

(5.58) 在定理(5.2)的条件之下,有应力场和应变场的唯一性。

5.3 对偶变分提法

象在3.5一样,我们要从两个略微不同的观点考察对偶问题。

5.3.1 静力允许场和势能

以K表示静力允许应力场 (c. s. a., 即 champ statiquement admissible) 的集合,其定义是

(5.59) $$K = \{\tau \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \text{ 在}\Omega\text{内 } \tau_{ij,j} + f_i = 0, \text{ 在 }\Gamma_F\text{ 上 } \tau_N = F_N, |\tau_T| \leqslant g\}^{1)}$$

1) 见后面的注 5.12.

注 5.10 对满足 $\tau_{ij,j}+f_i=0$ 的 τ，可以定义（见注 3.7）

$$\tau_{ij}n_j \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \forall i$$

于是

$$\tau_N = \tau_{ij}n_jn_i,\ \text{在 } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ 中定义} \tag{5.60}$$

而

$$\tau_{iT} = \tau_{ij}n_j - \tau_N n_i \in H^{-1/2}(\Gamma) \tag{5.61}$$

则有

$$\tau_T = \{\tau_{iT}\} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \tag{5.62}$$

条件"Γ_g 上 $|\tau_T| \leqslant g$"意指：τ_T 在 Γ_g 上的限制在$(L^\infty(\Gamma_g))^3$中，且满足

$$|\tau_T(x)| \leqslant g(x),\ \text{p. p. 于 } \Gamma_g \text{ 上}$$

因而，由 (5.59) 定义的集合 K 是如下定义的空间 H 中的一个闭凸集

$$H = \{\tau \,|\, \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\} \tag{5.63}$$

$\left(H \text{ 赋予内积 } \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx\right)$. □

对 $\tau \in K$，它的势能 $J(\tau)$ 定义为

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{ij}n_jU_i d\Gamma \tag{5.64}$$

(与在(3.68)中一样，用记号(3.69))

原问题的对偶问题是

问题 5.4 求 $J(\tau)$ 在 K 上的最小值. □

注 5.11 与问题3.2比较可见，摩擦的出现只改变凸集 K（这确实是本质的，因为我们可从一个仿射线性流形凸集过渡到"非线性"凸集）. □

注 5.12 当然，问题 5.4 要假定 K 非空. 注意，若 u 是(5.23)，(5.24)的解，$\text{Mes}\Gamma_U > 0$（相应地，(5.46)的解当 $\Gamma_U = \varnothing$），则

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) \in K$$

根据前面的结果即得

(5.65) 若 $\text{Mes}\Gamma_U > 0$（相应地当 $\Gamma_U = \varnothing$，(5.52)成立），

$$\text{则 } K \neq \varnothing$$

由此立即推出

定理 5.3 若 $\text{Mes}\Gamma_U > 0$（相应地，当 $\Gamma_U = \varnothing$，(5.52) 成立），则在 K 上有唯一的 σ 使

$$J(\sigma) \leqslant J(\tau), \ \forall \tau \in K \tag{5.66}$$

或等价地

$$\mathscr{A}(\sigma, \tau - \sigma) \geqslant \int_{\Gamma_U} U_i(\tau_{ij}n_i - \sigma_{ij}n_i)d\Gamma, \ \forall \tau \in K \tag{5.67}$$

剩下的是明确初始（或"原"）问题和对偶问题之间的关系.

往证，初始问题和对偶问题可由类似于(3.81)的关系（见下面(5.76)）联系起来，并且这两问题的解 u 和 σ 满足：

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u), \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \tag{5.68}$$

$$\sigma_T u_T + g|u_T| = 0, \text{ 在 } \Gamma_{\mathscr{F}} \text{ 上} \tag{5.69}$$

5.3.2 对偶和 Lagrange 乘子

现要把 3.5.2 中的考虑推广到现在"带摩擦"的情形.

沿用 3.5.2 的记号，引入（利用(3.73)）

$$l_*(\tau, v, q) = l(\tau, v, q) + j(v)^{1)} \tag{5.70}$$

$$l_*(q) = \sup_{\tau, v} l_*(\tau, v, q), \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v = U \tag{5.71}$$

如(3.75)一样有

$$\sup_q l_*(q) \leqslant I(u) \tag{5.72}$$

用 3.5.2 的记号，令

$$l_*(\tau, v, q) = l_1(\tau, q) + l_3(v, q)$$

$$l_3(v, q) = j(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} F_N v_N d\Gamma + \int_\Omega q_{ij}a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(v)dx$$

我们有（见(3.76)）

---

1) $\int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} F v d\Gamma$ 代以 $\int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} F_N v_N d\Gamma$.

(5.73) $$\operatorname{Inf} I_1(\tau, q) = -\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau),$$

其中 $A_{ijkh}\tau_{kh} = q_{ij}$

又

$$I_3(v, q) = j(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_g} F_N v_N d\Gamma + \int_\Omega q_{ij} a_{ijkh}(\partial v_k/\partial x_h) dx$$

由此推出,除非 $\tau \in K$, 在 Γ_U 上 $v = U$,

$$\operatorname*{Inf}_v I_3(v, q) = -\infty,$$

而当 $\tau \in K$, 在 Γ_U 上 $v = U$ 时

$$\operatorname{Inf} I_3(v, q) = \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h v_k d\Gamma$$

于是

(5.74) $$I_*(q) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) + \displaystyle\int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h u_k d\Gamma, \text{若 } \tau \in K \\ \quad \text{其中 } q_{ij} = A_{ijkh}\tau_{kh} \\ -\infty, \text{其它} \end{cases}$$

而

(5.75) $$I(u) = -\frac{1}{2}a(u, u) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma$$

事实上,由 $Au = f$, 在 Γ_U 上 $u = U$, 在 Γ_g 上 $\sigma_N = F_N$,

$$|\sigma_T| \leqslant g, \quad \sigma_T u_T + g|u_T| = 0$$

可推出

$$a(u, u) - \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i d\Gamma - \int_{\Gamma_g} F_N u_N d\Gamma - \int_{\Gamma_g} \sigma_T u_T d\Gamma = (f, u)$$

又由于

$$-\int_{\Gamma_g} \sigma_T u_T d\Gamma = j(u)$$

则得(5.75).

于是

$$\operatorname{Sup} I_*(q) \geqslant -\frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma,\sigma)+\int_{\Gamma_U}\sigma_{kh}n_hU_k d\Gamma - I(u)$$

由此得类似于(3.81)的结论:

定理 5.4 我们有

(5.76)
$$\inf_{\tau\in K}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)-\int_{L_U}\tau_{kh}n_hU_k d\Gamma\right] + \inf_{\Gamma_U\text{上}v=U} I(v) = 0$$

此外,解 σ 和 u 由(5.68),(5.60)联系。 □

5.4 其它边条件和尚未解决的问题

指南. 在本段将指出可能遇到的其它边条件, 仍然或不再保留在 Coulomb 摩擦定律的结构内.

这就提出了新的问题,有些问题是前面的简单变形,而另一些似乎尚未解决.

5.4.1 带摩擦的法向位移

在 5.1.2 所处理的问题中,摩擦作用在切向位移上. 现要考虑法向位移伴随摩擦的情形[1].

仍用前述记号和条件,问题是求(5.17)满足(5.18)的解, 而在 Γ_g 上是下列条件: 设 g_1 和 g_2 在 $L^\infty(\Gamma_g)$ 中给定 (或更一般地,在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 中,考虑它在 Γ_g 上的限制);设

(5.77)
$$g_1 \leqslant 0 \leqslant g_2$$

则对 $x\in\Gamma_g$, 我们有

(5.78)
$$\left|\begin{array}{l} g_1<\sigma_N(x)<g_2 \Rightarrow u_N(x)=0 \\ \sigma_N(x)=g_1 \Rightarrow u_N(x)\geqslant 0 \\ \sigma_N(x)=g_2 \Rightarrow u_N(x)\leqslant 0 \end{array}\right.$$

比如还附加古典条件

1) 在某些力学装置中出现这种情形.

(5.79) $\sigma_T = 0$, 在 Γ_g 上

不难验证这一问题"等价于"[1]求泛函

(5.80) $$I_1(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + j_1(v) - (f,v)$$

的最小值，其中

(5.81) $$j_1(v) = \int_{\Gamma_g}(-g_1v_N^+ + g_2v_N^-)d\Gamma$$

最小值是在函数 $v\in(H^1(\Omega))^3$ 的集合 $\mathscr{U}_{ad}$ 上取的，v 满足

$$在\ \Gamma_U\ 上\ v = U.$$

事实上，若 u 是 $\mathscr{U}_{ad}$ 中使 $I_1(v)$ 取最小值的解，则

(5.82) $$a(u, v-u) + j_1(v) - j_1(u) - (f, v-u) \geqslant 0,$$
$$\forall v\in\mathscr{U}_{ad}$$

(取 $v = u\pm\varphi, \varphi\in(\mathscr{D}(\Omega)^3)$ 由此得

$$Au = f$$

由此根据 Green 公式(2.33)(由于在 Γ_U 上 $v = u = U$):

$$a(u, v-u) - \int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)]d\Gamma$$
$$= (f, v-u) \leqslant a(u, v-u) + j_1(v) - j_1(u)$$

由此

(5.83) $$j_1(v) - j_1(u) + \int_{\Gamma_g}[\sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)]d\Gamma \geqslant 0$$

取 $v_T - u_T = \phi$, $\phi\in(H^{1/2}(\Gamma))^3$, $n\phi = 0$ (于 Γ 上)，而取 $v_N - u_N = 0$ (这是允许的)，从 (5.83) 推知，(5.79) 成立，于是 (5.83)简化为

(5.84) $$j_1(v) - j_1(u) + \int_{\Gamma_g}\sigma_N(v_N - u_N) \geqslant 0$$

或

---

1) 象多次申明过的那样，这总是一种形式上的等价，因为在 (5.17)，(5.18)，(5.78)，(5.79)中我们没有明确关于 u 的可微性条件.

(5.85) $$\int_{\Gamma_g}[(\sigma_N - g_1)v_N^+ + (g_2 - \sigma_N)v_N^-]d\Gamma$$
$$- \int_{\Gamma_g}[(\sigma_N - g_1)u_N^+ + (g_2 - \sigma_N)u_N^- d\Gamma \geqslant 0$$

取 $v_N = \pm\lambda\varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi \geqslant 0$, 再令 $\lambda \to +\infty$ 和 $\lambda \to 0$, 可得

(5.86) $$\sigma_N - g_1 \geqslant 0, \quad g_2 - \sigma_N \geqslant 0$$

和

$$\int_{\Gamma_g}[(\sigma_N - g_1)u_N^+ + (g_2 - \sigma_N)u_N^-]d\Gamma \leqslant 0$$

与(5.86)结合,这等价于

(5.87) $$(\sigma_N - g_1)u_N^+ + (g_2 - \sigma_N)u_N^- = 0$$

而(5.86)、(5.87)等价于(5.78),则得结果. □

推论 用前面的方法可见,若 $\text{Mes}\Gamma_U > 0$, 则问题有唯一解.

在 $\Gamma_U = \varnothing$ 的情形,为使问题有解,必须

(5.88) $$j_1(\rho) - (f, \rho) \geqslant 0, \quad \forall \rho \in \mathscr{R}$$

由此(ρ 换成 $-\rho$)推出

(5.89) $$-\int_\Gamma(-g_1\rho_N^- + g_2\rho_N^+)d\Gamma \leqslant (f, \rho)$$
$$\leqslant \int_\Gamma(-g_1\rho_N^+ + g_2\rho_N^-)d\Gamma, \quad \forall \rho \in \mathscr{R}$$

则用类似于定理 5.2 的方法证明了,在强化的条件(5.88)之下,即若

(5.90) $$j_1(\rho) - (f, \rho) > 0, \quad \forall \rho \in \mathscr{R}, \quad \rho \neq 0$$[1]

则问题至少有一解. 应变和应力场是唯一的. □

5.4.2 作为摩擦问题的极限情形的 Signorini 问题

我们首先考虑 5.4.1 的特殊情形, $g_1 = 0$, $g_2 = g > 0$. 我们引入

(5.91) $$\mathscr{f}(v) = \int_\Gamma v_N^- d\Gamma$$

---

1) $\mathscr{R}$ 是有穷维的,这等价于

$$j_1(\rho) - (f, \rho) \geqslant \beta|\rho|, \quad \beta > 0, \quad \rho \in \mathscr{R}.$$

那么,对应的问题是(在 Γ_U 上使 $v = U$ 的 v 的空间上)

$$\frac{1}{2}a(v, v) + g\not{j}(v) - (f, v) \tag{5.92}$$

的最小化。

我们考虑最难处理的情形

$$\Gamma_U = \varnothing \tag{5.93}$$

那么,若假定(5.90)成立,这里即

$$-(f, \rho) + g\not{j}(\rho) > 0, \ \forall \rho \in \mathscr{R}, \ \rho \neq 0 \tag{5.94}$$

则存在使(5.92)在 $V = (H^1(\Omega)^3)$ 上取最小值的 u_g,满足

$$\begin{aligned} a(u_g, v - u_g) + g\not{j}(v) - g\not{j}(u_g) \\ - (f, v - u_g) \geqslant 0, \ \forall v \in V \end{aligned} \tag{5.95}$$

我们有应变和应力场的唯一性.

现令 $g \to +\infty$。引入集合

$$K = \{v \mid v \in V, \text{在 } \Gamma \text{ 上 } v_N \geqslant 0\} \tag{5.96}$$

这是 V 中的一个凸闭集.

假定

$$-(f, \rho) + g_0\not{j}(\rho) > 0, \ \forall \rho \in \mathscr{R}, \ \rho \neq 0, \quad g_0 > 0 \text{ 固定} \tag{5.97}$$

则 $\forall g \geqslant g_0$,(5.94)成立. 于是对 $g \geqslant g_0$ 存在 u_g. 往证

$$\left| \begin{array}{l} \text{可找到序列 } g \to +\infty, \text{使 } u_g \text{ 在 } V \text{ 中弱收敛于} \\ a(u, v - u) \geqslant (f, v - u), \forall v \in K, \text{的解 } u. \end{array} \right. \tag{5.98}$$

(5.98)解释如下

$$\left| \begin{array}{l} Au = f \\ \sigma_T = 0, \Gamma \text{ 上}, \\ u_N \geqslant 0, \ \sigma_N \geqslant 0, \ \sigma_N u_N = 0, \Gamma \text{ 上} \end{array} \right. \tag{5.99}$$

这是 Signorini 问题(见 G. Fichera[1]).

(5.98)的证明指出, 在条件(5.97)之下 Signorini 问题解的存在性,由该条件知

$$-(f, \rho) > 0, \ \forall \rho \in \mathscr{R} \cap K, \ \rho \neq 0 \tag{5.100}$$

在 G. Fichera[1] 中证明了(又见 Lions-Stampacchia[1]) 只在较

弱条件(5.100)之下 Signorini 问题解的存在性．这里，在更强的假设(5.97)之下得到，Signorini 问题是摩擦问题的极限情形．□

(5.98)的证明．由(5.97)得到

$$-(f,\rho)+g_0 j(\rho)\geqslant c_0\|\rho\|$$

这里$\|\ \ \|$表示V中的范数． 因此，若（象在定理 5.2 中那样）分解$v\in V$ 成

$$v=w+\rho$$

则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a(v,v)+gj(v)-(f,v)\\
&=\frac{1}{2}a(w,w)-(f,w)+gj(w+\rho)-(f,\rho)\\
&=\frac{1}{2}a(w,w)-(f,w)-(f,\rho)+g_0 j(\rho)\\
&\qquad+(g-g_0)j(w+\rho)+g_0(j(w+\rho)\\
&\qquad-j(\rho))\ (\text{由}(5.56),\text{且设}\ g\geqslant g_0)\\
&\geqslant\frac{1}{2}\alpha\|w\|^2-c_1\|w\|+c_0\|\rho\|\\
&\qquad+g_0(j(w+\rho)-j(\rho))
\end{aligned}$$

而

$$j(w+\rho)-j(\rho)\geqslant -j(w)\geqslant -c_2\|w\|$$

由此

$$\frac{1}{2}a(v,v)+gj(v)-(f,v)\geqslant c_3(\|w\|^2+\|\rho\|)-c_4\|w\|$$

这里 c_3 和 c_4 是不依赖于g的常数．故 u_g——它是使

$$\frac{1}{2}a(v,v)+gj(v)-(f,v)$$

取最小值的一个元素——组成V中的一有界集．

于是从(5.95)推出(比如令$v=0$)

$$gj(u_g)\leqslant c_5$$

故

$$(5.101)\qquad \not{j}(u_g)\to 0,\ 当\ g\to +\infty\ 时$$

从而可取子序列,仍记 u_g,使在 V 中 u_g 弱收敛于 u,根据(5.101) $\not{j}(u)=0$,故 $u\in K$.

若在(5.95)中取 $v\in K$,($\not{j}(v)$ 此时为零),即得

$$(5.102)\qquad a(u_g, v)-(f, v-u_g)\geqslant a(u_g, u_g)$$

在(5.102)中取极限便得

$$a(u, v)-(f, v-u)\geqslant a(u, u),\ \forall v\in K$$

即得结果. □

5.4.3 带给定法向位移的其它摩擦条件

在一些带摩擦的边条件中,可能法向位移是给定的,同时至少以近似的方式知道法向应力. 这就得到在 Γ_g 上的边条件[1]:

(5.103)在 Γ_g 上 $u_N=0$

$$(5.104)\qquad \left|\begin{array}{l}|\sigma_T|<g\Longrightarrow u_T=0\\ |\sigma_T|=g\Longrightarrow \exists\lambda\geqslant 0\ 使\ u_T=-\lambda\sigma_T\end{array}\right.$$

条件(5.104)表示一个与 Coulomb 定律不同的摩擦定律. 相应的变分提法是

$$(5.105)\qquad \left|\begin{array}{l}a(u,v-u)+\int_{\Gamma_g}g(|v_T|-|u_T|)d\Gamma\geqslant(f,v-u)\\ \forall v\in\mathscr{U}_{ad}\ 且满足(5.103)\end{array}\right.$$

问题的解法跟 5.2 相同.

5.4.4 带给定法向位移的 Coulmb 摩擦

我们重复 5.1.2 中所考虑的 Coulomb 定律,但这次假定在 $\Gamma_g=\Gamma-\Gamma_U$ 上给定的是法向位移,而非法向应力.

这就得到(见(5.7),(5.8))下列问题:

求(5.17),(5.18)的解 u,满足

$$(5.106)\qquad u_N=0,\ 在\ \Gamma_g\ 上$$

并且

1) 在 Γ_U 上的边条件不变.

$$
(5.107)\quad \begin{cases} |\sigma_T| \leqslant \mathscr{F}|\sigma_N| \\ |\sigma_T| < \mathscr{F}|\sigma_N| \Longrightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = \mathscr{F}|\sigma_N| \Longrightarrow \text{存在 } \lambda \geqslant 0 \text{ 使} u_T = -\lambda\sigma_T \end{cases}
$$

这问题似乎尚未解决。我们只作下列说明:

若引入

$$
(5.108)\qquad \mathscr{U}_{ad} = \{v \mid v \in (H^1(\Omega))^3,\ \text{在 } \Gamma_U \text{ 上} v = U,\ \text{在 } \Gamma_{\mathscr{F}} \text{ 上 } v_N = 0\}
$$

则 u 是(5.17),(5.18),(5.106),(5.107)的解,当且仅当 u 是下列不等方程在 $\mathscr{U}_{ad}$ 中的解:

$$
(5.109)\quad a(u, v-u) + \int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} \mathscr{F}|\sigma_N(u)|(|v_T| - |u_T|)d\Gamma \geqslant (f, v-u),\ \forall v \in \mathscr{U}_{ad}
$$

形式上的等价性易于验证. 但问题(5.109)出现许多困难:

i) 必须给 (5.109) 以明确的意义;因为当 $u \in \mathscr{U}_{ad}$,$\sigma_N(u)$ 在 $\Gamma_{\mathscr{F}}$上没有定义;可是,若 u 是(5.109)的解,那么必有 $Au = f$,从而有可能 (但并未证明) 当 $u \in (H^1(\Omega))^3$ 且 $Au \in (L^2(\Omega))^3$ 时,在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 定义 $|\sigma_N(u)|$;

ii) 即使 i) 的困难克服了,不等方程(5.109)——它不是通常的不等方程——仍没有完全解决.

可以证明下列正则化不等方程的解 u 的存在性

$$
(5.110)\quad \begin{gathered} \varepsilon(Au, A(v-u)) + a(u, v-u) + \int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} \mathscr{F}|\sigma_N(u)|(|v_T| - |u_T|)d\Gamma \geqslant (f, v-u) \\ u \in (H^2(\Omega))^3,\ \text{在}\Gamma_U\text{上 } u = v = U,\ \text{在 } \Gamma_{\mathscr{F}} \text{ 上} u_N = v_N = 0 \end{gathered}
$$

5.4.5 带摩擦的 Signorini 问题 (G. Duvaut[17])

这里研究的是放置在刚性支承上的弹性体的形变. 在没有应力的初始状态下,物体占据 $\mathbf{R}^3$ 的一区域 Ω,其边界为 Γ,Γ 的一部分 Γ_1 与一刚性支承 S 接触. 物体 Ω 承受体积力 $\{f_i\}$ 和在 $\Gamma - \Gamma_1$ ($= \Gamma_2$) 上的表面力. 这些力引起弹性体的形变,在 Γ_1 上相应的位移满足: 法向分量是负的或零(象古典 Signorini 问题一样),而

切向分量当法向分量为零时是一带摩擦的位移。

位移场 $\{u_i\}$ 和应力 $\{\sigma_{ij}\}$ 满足方程和条件

(5.111) $$\sigma_{ij,j}+f_i=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}$$

(5.112) $$\sigma_{ij}=a_{ijkh}\tau_{kh}(u), \text{ 在 } \Omega \text{ 内}$$

(5.113) $$\left|\begin{array}{l} \sigma_{ij}n_j=F_i, \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ u_N\leqslant 0, \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ u_N<0\Longrightarrow\sigma_{ij}n_j=0 \\ u_N=0\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\sigma_N\leqslant 0 \\ \text{且}\left|\begin{array}{l}|\sigma_T|<\mathscr{F}|\sigma_N|\Longrightarrow u_T=0 \\ |\sigma_T|=\mathscr{F}|\sigma_N|\Longrightarrow\exists\lambda\geqslant 0, \\ \quad u_T=-\lambda\sigma_T\end{array}\right.\end{array}\right|\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}\end{array}\right.$$

若令

$$\mathscr{U}_{ad}=\{v\,|\,v=\{v_i\}, v_i\in H^1(\Omega), \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上 } v_in_i=v_N\leqslant 0\}$$

我们证明了问题(5.111)—(5.113)的解满足

(5.114) $$\left|\begin{array}{l} u\in\mathscr{U}_{ad} \\ a(u,v-u)+\int_{\Gamma_1}\mathscr{F}|\sigma_N(\omega)|(|v_T|-|u_T|)d\Gamma \\ \qquad\geqslant (f,v-u)+(F,v-u)_{\Gamma_2}, \ \forall v\in\mathscr{U}_{ad}\end{array}\right.$$

求满足(5.114)的 u 是一个尚未解决的问题. □

5.5 动态情形

指南. 现在重新考虑 5.1.2 的问题 5.1，我们将给出它的变分提法，这是问题 5.3 的"动态类比"，尔后解决所提出的问题. 我们对前几节中其它问题的"动态类比"从略，对它们可得出类似结果. 在稳定情形中未解决的问题在动态情形的类似问题中也未解决.

5.5.1 变分提法

定义

(5.115) $$\mathscr{U}_{ad}(t)=\{v\,|\,v\in(H^1(\Omega))^3, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v=U'(t)\}$$

那末沿用 5.1.2 的记号就得到

问题 5.5 求 u，满足

$$(5.116)\qquad u'(t)\in \mathscr{U}_{ad}(t),\ \forall t$$

$$(u''(t),v-u'(t))+a(u(t),v-u'(t))+j(v)$$

$$(5.117)\qquad -j(u'(t))\geqslant (f(t),v-u'(t))$$

$$+\int_{\Gamma_g} F_N(t)(v_N-u'_N(t))d\Gamma$$

$$\forall v\in \mathscr{U}_{ad}(t)$$

和初条件

$$(5.118)\qquad u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1\quad \square$$

注 5.14 从(5.116),(5.118)推出在 Γ_U 上 $u(t)=U(t)+(u_0-U(0))$，则当

(5.119)在 Γ_U 上 $u_0=U(0)$

由此即得(5.6). □

注 5.15 上述问题所涉及的是关于 t 的二阶发展不等方程(在第一、二两章中遇到的发展不等方程关于 t 是一阶的). □

注 5.16 若 $\mathscr{F}=0$(无摩擦的情形),且 $\Gamma_F=\Gamma-\Gamma_U-\Gamma_g$，则不等式(5.117)成为等式,并归结为 (2.42). 问题 5.5 的解就又作为一个特例给出第 4 节的结果. 为清楚起见，我们把那些结果分别论述

注 5.17 在前几段(静态情形)我们看到

$$\text{Mes}\Gamma_U>0\ \text{ 和 }\ \Gamma_U=\varnothing$$

的两种情形的十分不同的方式解决. 在后一情形,为了解的存在,摩擦力要大到能够抵消作用在系统上的外力，以获得物体的静态平衡位置.

在动态情形,我们将看到,在两种情形下，以同一方式得到结果.但是如在“无摩擦”时已指示的(见注 4.4),在“$\Gamma_U=\varnothing$”时可以有弹性体的整体运动,它分解为一刚体运动和一形变运动.

这刚体运动一般破坏了所加的边条件，因此仅在下列情形我们才认为解是有效的： 或 Mes $\Gamma_U>0$，或 $\Gamma_U=\varnothing$，且对所有 $t>0$，有

(5.120) $\int_{\Gamma} g(t)|\rho_T| d\Gamma - [(f(t), \rho)$

$$+ \int_{\Gamma} F_N(t)\rho_N d\Gamma] \geqslant 0, \forall \rho \in \mathscr{R}, \ \rho \neq 0\square$$

5.5.2 结果的陈述

与 4.1 一样,引入 $\Phi(t)$, 满足

(5.121) $\Phi(t) \in (H^1(\Omega))^3$, 在 Γ_U 上 $\Phi(t) = U(t)$

如 4.2 那样,引入

(5.122) $V_0 = \{v | v \in (H^1(\Omega))^3$, 在 Γ_U 上 $v = 0\}$[1)]

以 $u(t) - \Phi(t)$代 $u(t)$并保留记号 $u(t)$, 则问题 5.5 等价于: 求从 $[0, T]$ 到 V_0 的函数 $t \to u(t)$, 满足

(5.123)
$$(u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j(v + \Phi'(t)) - j(u'(t) + \Phi'(t)) \geqslant (\Psi(t), v - u'(t)), \ \forall v \in V_0$$

其中

(5.124)
$$(\Psi(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_g} F_N(t) v_N d\Gamma - (\Phi''(t), v) - a(\Phi(t), v)$$

和初值

(5.125) $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$ (这里与(5.118)比较, $u_0(u_1)$ 相当 $u_0 - \Phi(0)$(相应地, $u_1 - \Phi'(0)$))

引入 $H = (L^2(\Omega))^3$ 和 V_0 的对偶 V_0', 满足

$$V_0 \subset H \subset V_0'$$

我们将证明

定理 5.7 设

(5.126) $f, f', f'' \in L^2(0, T; H); F_N, F_N', F_N'' \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_g))$

(5.127)
$$\begin{cases} \Phi, \Phi', \Phi'' \in L^2(0, T; V)(V = (H^1(\Omega))^3) \\ \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)} \in L^2(0, T; H), \ \Phi(0) \in (H^2(\Omega))^3 \end{cases}$$

(5.128) g 不依赖 t,

---

1) 当 $\Gamma_U = \varnothing$, $V_0 = V$.

(5.129) $$u_0 \in (H^2(\Omega))^3$$

(5.130) $$u_1 \in (H^1(\Omega))^3, \text{ 在 } \Gamma_g \text{ 上 } u_{1T} + \Phi'_T(0) = 0$$

(5.131) $$a(\Phi(0), v) = (A\Phi(0), v) - \int_{\Gamma_g} \sigma_{0T} v_T d\Gamma, \ \forall v \in V_0$$

在这些条件之下，有且仅有一函数 u，它是(5.123)，(5.125)满足下述条件的解

(5.132) $$u, u' \in L^\infty(0, T; V_0)$$

(5.133) $$u'' \in L^\infty(0, T; H)$$

5.5.3 唯一性的证明

证明是容易的. 设 u 和 u_1 是两个可能的解. 在(5.123)中取 $v = u_1'(t)$（相应地，在关于 u_1 的不等方程中令 $v = u'(t)$ 并相加，令 $w = u - u_1$，则得

$$-(w'', w') - a(w, w') \geqslant 0$$

即

$$\frac{d}{dt}[|w'(t)|^2 + a(w(t), w(t))] \leqslant 0$$

由于 $w(0) = 0$，$w'(0) = 0$，$a(v, v) \geqslant 0$，即有

$$w'(t) = 0, \text{ 即得 } w(t) = 0$$

5.5.4 存在性的证明

为了看出在缺少初看限制很强的条件（5.128）时哪里会引起困难，我们在开始证明时假定 g 依赖 t，满足

$$g, \partial g/\partial t, \partial^2 g/\partial t^2 \in L^\infty(\Gamma_g \times]0, T[)$$

我们把泛函 j 正则化. 定义

(5.134) $$j_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma_g} g(x, t)\varphi_\varepsilon(|v_T|^2) d\Gamma$$

其中，比如

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{1+\varepsilon}|\lambda|^{(1+\varepsilon)/2}, \ \varepsilon > 0$$

j_ε 是 j 的一凸正则化.

考虑近似方程

(5.135) $(u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v) = (\Psi, v),$
$\forall v \in V$

初条件是

(5.136) $$u_\varepsilon(0) = u_0, \ u_\varepsilon'(0) = u_1$$

我们首先指出(5.135),(5.136)解的存在性，然后建立不依赖于 ε 的先验估计．最后对 ε 取极限．

如常，首要之点在于先验估计，然后如第 4 节那样，以对 Galerkin 逼近中的维数取极限而得到 u_ε 存在性的证明．现建立先验估计．

先验估计 (I) 在(5.135)中取 $v = u_\varepsilon' + \Phi'$．注意到

$$(j_\varepsilon'(w'), w') \geqslant 0, \ \forall w \in V_0$$

即得

$$(u_\varepsilon''(t), u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)) + a(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)) \leqslant (\Psi(t), u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t))$$

由此

(5.137) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_\varepsilon'(t)|^2 + a(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))) \leqslant (\Psi(t), u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)) - (u_\varepsilon''(t), \Phi'(t)) - a(u_\varepsilon(t), \Phi'(t))$$

由于对 $\lambda > 0$ 存在 $\alpha > 0$ 使

$$a(v, v) + \lambda|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2$$

对 t 积分(5.137)即得

(5.138) $$|u_\varepsilon'(t)|^2 + \alpha\|u_\varepsilon(t)\|^2 - \lambda|u_\varepsilon(t)|^2 \leqslant |u_1|^2 + c\|u_0\|^2 + 2\int_0^t (\Psi(\sigma), u_\varepsilon'(\sigma) + \Phi'(\sigma))d\sigma - 2\int_0^t (u_\varepsilon''(\sigma), \Phi'(\sigma))d\sigma - 2\int_0^t a(u_\varepsilon(\sigma), \Phi'(\sigma))d\sigma = |u_1|^2 + c\|u_0\|^2 + 2\int_0^t (\Psi(\sigma), u_\varepsilon'(\sigma) + \Phi'(\sigma))d\sigma$$

$$- 2(u_\varepsilon'(t), \Phi'(t)) + 2(u_1, \Phi'(0))$$
$$+ 2\int_0^t (u_\varepsilon'(\sigma), \Phi''(\sigma))d\sigma$$
$$- 2\int_0^t a(u_\varepsilon(\sigma), \Phi'(\sigma))d\sigma$$

利用

$$|u_\varepsilon(t)|^2 \leqslant c\int_0^t |u_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma + |u_0|^2$$

并注意由对 Φ, f, F_N 的假设导出

(5.139) $$\Psi, \Psi' \in L^2(0, T; V_0')$$

从(5.138)推得

$$|u_\varepsilon'(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant c + c\int_0^t |u_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma$$
$$+ c\int_0^t \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma + 2\int_0^t (\Psi(\sigma), u_\varepsilon'(\sigma))d\sigma$$
$$= c\left(1 + \int_0^t (|u_\varepsilon'(\sigma)|^2 + \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2)d\sigma\right)$$
$$+ 2(\Psi(t), u'(t)) - 2(\Psi(0), u_1)$$
$$- 2\int_0^t (\Psi'(\sigma), u_\varepsilon(\sigma))d\sigma$$

由此得

(5.140) $$|u_\varepsilon'(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant c\left(1 + \int_0^t (|u_\varepsilon'(\sigma)|^2 + \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2)d\sigma\right)$$

由 Gronwall 引理即得

(5.141) $$|u_\varepsilon'(t)| + \|u_\varepsilon(t)\| \leqslant c \quad \square$$

先验估计 (II)(5.135)对 t 求导数,再取 $v = u''(t) + \Phi''(t)$. 令

$$X(t) = \left(\frac{d}{dt} f_\varepsilon'(u_\varepsilon'(t) + \phi'(t)), u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)\right)$$

便得

(5.142) $$(u_\varepsilon'''(t), u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)) + a(u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)) + X(t) = (\Psi'(t), u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t))$$

而

$$(j_\varepsilon'(w), v) = 2\int_{\Gamma_g} g(x, t)\varphi_\varepsilon'(|w_T|^2)w_T v_T d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_g} g(x,t)\phi_\varepsilon(w_T)v_T d\Gamma$$

其中 $\phi_\varepsilon(w) = 2\varphi_\varepsilon'(|w|^2)w$[1]，于是

$$\left(\frac{d}{dt} j_\varepsilon'(w(t)), v\right) = \int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t} \phi_\varepsilon(w_T(t))v_T d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_g} g(x, t)\lim_{h\to 0} \frac{\phi_\varepsilon(w_T(t+h)) - \phi_\varepsilon(w_T(t))}{h} v_T d\Gamma$$

v 代之以 $w'(t)$得

$$\left(\frac{d}{dt} j_\varepsilon'(w(t)), w'(t)\right) = \int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t} \phi_\varepsilon(w_T)w_T' d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_g} g \lim_{h\to 0} \frac{\phi_\varepsilon(w_T(t+h)) - \phi_\varepsilon(w_T(t))}{h}$$

$$\cdot \frac{w_T(t+h) - w_T(t)}{h} d\Gamma$$

由于算子 ϕ_ε 是单调的，后一积分$\geqslant 0$，于是

$$\left(\frac{d}{dt} j_\varepsilon'(w(t)), w'(t)\right) \geqslant \int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t} \phi_\varepsilon(w_T)w_T' d\Gamma \tag{5.143}$$

由这不等式和(5.142)给出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|u_\varepsilon''(t)|^2 + a(u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon'(t))] \tag{5.144}$$

$$+ \int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t} \phi_\varepsilon(w_T)w_T' d\Gamma$$

$$\leqslant (\Phi'(t), u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t))$$

$$- (u_\varepsilon'''(t), \Phi''(t)) - a(u_\varepsilon'(t), \Phi''(t))$$

其中 w 代之以 $u_\varepsilon' + \Phi'$.

---

1) 这句为译者所加. ——译者注

从0到t积分上式得

$$
\begin{aligned}
&|u_\varepsilon''(t)|^2+\|u_\varepsilon'(t)\|^2\leqslant c(\|u_1\|^2+|u_\varepsilon''(0)|^2)\\
(5.145)\qquad &+c\int_0^t|u_\varepsilon''(\sigma)|^2d\sigma+2\int_0^t(\Psi'(\sigma),u_\varepsilon''(\sigma))d\sigma\\
&-2\int_0^t(u_\varepsilon'''(\sigma),\Phi''(\sigma))d\sigma\\
&-2\int_0^t\int_{\Gamma_g}\frac{\partial g}{\partial t}\psi_\varepsilon(u_{\varepsilon T}'+\Phi_T')(u_{\varepsilon T}''+\Phi_T'')d\Gamma d\sigma
\end{aligned}
$$

而

$$
\int_0^t(\Psi'(\sigma),u_\varepsilon''(\sigma))d\sigma=(\Psi'(t),u_\varepsilon'(t))-(\Psi'(0),u_1)-\int_0^t(\Psi'',u_\varepsilon')d\sigma
$$

对f，F_N，Φ的假设蕴涵

$$
(5.146)\qquad \Psi''\in L^2(0,T;V_0')
$$

于是

$$
(5.147)\quad \int_0^t(\Psi'(\sigma),u_\varepsilon''(\sigma))d\sigma\leqslant c\|\Psi'(t)\|_*\|u_\varepsilon'(t)\|+c+\int_0^t\|\Psi''(\sigma)\|_*\|u_\varepsilon'(\sigma)\|d\sigma
$$

又有

$$
\int_0^t(u_\varepsilon'''(\sigma),\Phi''(\sigma))d\sigma=(u_\varepsilon''(t),\Phi''(t))-(u_\varepsilon''(0),\Phi''(0))-\int_0^t(u_\varepsilon'',\Phi''')d\sigma
$$

由(5.145)出发，即得

$$
\begin{aligned}
(5.148)\quad &|u_\varepsilon''(t)|^2+\|u_\varepsilon'(t)\|^2\leqslant c(\|u_1\|^2+|u_\varepsilon''(0)|^2)\\
&+c\int_0^t(\|u_\varepsilon'(\sigma)\|^2+|u_\varepsilon''(\sigma)|^2)d\sigma\\
&+2\left|\int_0^t\int_{\Gamma_g}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_\varepsilon(|u_{\varepsilon T}'+\Phi_T'|^2)d\Gamma d\sigma\right|
\end{aligned}
$$

现在必须估计$u_\varepsilon''(0)$。

由(5.135)得

$$(u_\epsilon''(0), v) = (\psi(0), v) - a(u_0, v) - (j_\epsilon'(u_1 + \Phi'(0)), v)$$

而根据(5.130)，$u_{1T} + \Phi_T'(0) = 0$，则有

$$\begin{aligned}(u_\epsilon''(0), v) &= (\psi(0), v) - a(u_0, v) \\ &= (f(0), v) + \int_{\Gamma_g} F_N(0) v_N d\Gamma \\ &\quad - (\Phi''(0), v) - a(\Phi_0, v) - a(u_0, v)\end{aligned}$$

而

$$a(u_0, v) = (Au_0, v) + \int_{\Gamma_g} \sigma_{0N} v_N d\Gamma + \int_{\Gamma_g} \sigma_{0T} v_T d\Gamma$$

由 $\sigma_{0N} = F_N(0)$ 并利用(5.131)则有

$$\begin{aligned}(u_\epsilon''(0), v) &= (f(0) - \Phi''(0) - Au_0 \\ &\quad - A\Phi(0), v) + \int_{\Gamma_g} \sigma_{0T} v_T d\Gamma - \int_{\Gamma_g} \sigma_{0T} v_T d\Gamma\end{aligned}$$

由此

$$u_\epsilon''(0) = f(0) - \Phi''(0) - A(u_0 + \Phi(0)) \tag{5.149}$$

于是考虑到所作的假设，特别有

$$|u_\epsilon''(0)| \leqslant c \tag{5.150}$$

现考虑(5.148)的最后一项，它等于

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \varphi_\epsilon(|u_{\epsilon T}' + \Phi_T'(t)|^2) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_g} \frac{\partial g}{\partial t}(x, 0) \varphi_\epsilon(|u_{\epsilon T}'(0) + \Phi_T'(0)|^2) d\Gamma \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Gamma_g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \varphi_\epsilon(|u_{\epsilon T}' + \Phi_T'|^2) d\Gamma d\sigma\end{aligned}$$

而为了在(5.148)中利用这里的估计，必须以$|u_\epsilon''(t)|$控制上式，但这里出现$\|u_\epsilon''(t)\|$，由此不能得到所要的结果，除非假定 $\partial g/\partial t = 0$，这正是条件(5.128)。

这样(5.148)和(5.150)给出

$$\begin{aligned}&|u_\epsilon''(t)|^2 + \|u_\epsilon'(t)\|^2 \\ &\quad \leqslant c\left(1 + \int_0^t (|u_\epsilon''(\sigma)|^2 + \|u_\epsilon'(\sigma)\|^2) d\sigma\right)\end{aligned} \tag{5.151}$$

由 Gronwall 引理则得

$$(5.152)\qquad |u_\varepsilon''(t)| + \|u_\varepsilon'(t)\| \leqslant c$$

对 ε 取极限

根据(5.141)和(5.152)可从 u_ε 取一序列，仍记为 u_ε，满足

$$(5.153)\qquad \left|\begin{array}{l} u_\varepsilon \to u,\ u_\varepsilon' \to u' \text{（相应地，} u_\varepsilon'' \to u''\text{），在} \\ L^\infty(0, T; V_0)\text{（相应地，在 } L^\infty(0, T; H)\text{）弱}^* \end{array}\right.$$

由(5.135)得

$$(5.154)\qquad \begin{aligned} &(u_\varepsilon'', v - u_\varepsilon') + a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon') + j_\varepsilon(v + \Phi') \\ &\quad - j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') - (\Psi, v - u_\varepsilon) \\ &= j_\varepsilon(v + \Phi') - j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') \\ &\quad - (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v - u_\varepsilon') \geqslant 0 \end{aligned}$$

在(5.154)中令

$$v = v(t),\ v \in L^2(0, T; V_0)$$

则得

$$(5.155)\qquad \begin{aligned} &\int_0^T [(u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + j_\varepsilon(v + \Phi') \\ &\quad - (\Psi, v - u_\varepsilon')] dt \geqslant \int_0^T [(u_\varepsilon'', u_\varepsilon') \\ &\quad + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon') + j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi)] dt \\ &= \frac{1}{2}[|u_\varepsilon'(T)|^2 + a(u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T))] \\ &\quad - \frac{1}{2}[|u_1|^2 + a(u_0, u_0)] \\ &\quad + \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') dt \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &\liminf_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{2}|u_\varepsilon'(T)|^2 + a(u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T))\right] \\ &\quad + \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') dt] - \frac{1}{2}[|u_1|^2 + a(u_0, u_0)] \\ &\geqslant \frac{1}{2}[|u'(T)|^2 + a(u(T), u(T))] \end{aligned}$$

$$+\int_0^T j(u'+\Phi')dt-\frac{1}{2}[|u_1|^2+a(u_0,u_0)]$$

$$=\int_0^T[(u'',u')+a(u,u')+j(u'+\Phi')]dt$$

于是(5.155)给出

$$(5.156)\quad \left|\begin{array}{l}\int_0^T[(u'',v-u')+a(u,v-u')+j(v+\Phi')\\ \quad -j(u'+\Phi')-(\Psi,v-u')]dt\geqslant 0\\ \quad\quad \forall v\in L^2(0,T;V_0)\end{array}\right.$$

从(5.156)过渡到逐点不等式(5.123)[1]可用与第一章5.6.3中同样的方法. □

6. 线性粘-弹性. 短记忆材料

6.1 特性定律和推广

粘弹性材料是"有记忆能力"的材料,其意义是,在时刻 t 的应力状态依赖于材料在前面时刻所受的全部形变.

若特性定律在应力张量和应变张量之间建立了线性关系,就称这些材料是线性的.

在6,7两节我们要考虑这种类型的材料,并区别有或没有摩擦的两种情形.

一类重要的"粘弹性特性定律"的材料是一种这样的材料,其应变和应力张量对 t 的导数(即关于 t 的变化率)之间有线性关系. 这是"比率型"的材料(见 A.M. Freudenthal 和 H. Geringer[1]),我们有

$$(6.1)\quad \sigma_{ij}(t)+A^{(1)}_{ijkh}\partial\sigma_{kh}(t)/\partial t+\cdots+A^{(n_1)}_{ijkh}\partial^{n_1}\sigma_{kh}(t)/\partial t^{n_1}$$
$$=a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(t)+a^{(1)}_{ijkh}\partial\varepsilon_{kh}(t)/\partial t+\cdots$$
$$+a^{(n_2)}_{ijkh}\partial^{n_2}\varepsilon_{kh}(t)/\partial t^{n_2}\ {}^{2)}$$

---

1) 其精确意义是: 可能除去 $[0,T]$ 中的 t 的一零测集外, $\forall v\in V_0$ 有(5.123).

2) 又见 W. A. Day[1].

(6.1)中对 t 的导数是在 R_t 上的广义函数意义下的，当 $t<0$ 时张量 σ 和 ε 是零（和前几节不同，这里代替 $\varepsilon_{kh}(u)$ 记 $\varepsilon_{kh}(t)$）. 在一维情形下，容易作明确的计算（例如利用 Laplace 变换），当 $n_2 \geqslant n_1$ 时得到

$$(6.2)\qquad \sigma(t)=a^{(0)}\varepsilon(t)+a^{(1)}\partial\varepsilon(t)/\partial t+\cdots+a^{(N)}\partial^N\varepsilon(t)/\partial t^N+\int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds$$

其中 $N=n_2-n_1$, $a^{(0)},\cdots,a^{(N)}$ 是常数，b 是当 $t>0$ 时正则，而当 $t\geqslant 0$ 时连续的函数.

当 $n_2<n_1$ 时得到

$$(6.3)\qquad \sigma(t)=\int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds$$

b 有上述同样性质.

定律(6.3)一般不予考虑，因为它所表示的特性与实验不太符合. 在第6节将研究 $n_1=0, n_2=1$ 的情形在第7节研究 $n_1=n_2=1$ 的情形.

当 $n_1=0$, $n_2=1$ 时，特性定律为

$$(6.4)\qquad \sigma_{ij}(t)=a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(t)+a^{(1)}_{ijkh}\partial/\partial t\,\varepsilon_{kh}(t)$$

这时我们说，涉及的是短记忆的材料，因为在时刻 t 的应力状态只依赖于在时刻 t 和紧在其前的时刻的形变. $a^{(0)}_{ijkh}$（相应地，$a^{(1)}_{ijkh}$）起弹性（相应地，粘性[1]）系数的作用，下述假设自然地与实验符合，

$$(6.5)\qquad \begin{cases} a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\\ a^{(1)}_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\end{cases}$$

（$a^{(1)}_{ijkh}$ 是对速度向量场所构成的 ε_{ij} 的系数，因而是粘性系数. 因而数值 $a^{(1)}_{ijkh}\varepsilon_{ij}(u')\varepsilon_{kh}(u')$ 是正的消失能量项，此即(6.5)第二个条件）.

当 $n_1=n_2=1$ 时，特性定律是

$$(6.6)\qquad \sigma_{ij}(t)=a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(t)+\int_0^t b_{ijkh}(t-s)\varepsilon_{kh}(s)ds$$

---

1) 因它在形变速度张量之前.

服从特性定律(6.6)的材料(在第7节将明确对函数 $t \to b_{ijkh}(t)$ 的假设)称为长记忆的，因为时刻 t 的应力状态依赖时刻 t 的形变，还依赖在 t 之前的时刻的形变。 □

6.2 动态情形. 问题的提法

方程是[1)]

(6.7)
$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} a^{(1)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) = f_i, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}$$
$$t \in]0, T[$$

边条件 考虑在 $\Gamma = \partial\Omega$ 的一部分 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 上带摩擦(系数为常数 $\mathscr{F}$)的在 $\Gamma_U = \Gamma - \Gamma_{\mathscr{F}}$ 上位移给定的情形。

于是边条件类似于 5.1.2:

(6.8)
$$\text{在 } \Gamma_U \times]0, T[\text{ 上}, u_i = U_i$$

(6.9)
$$\text{在 } \Gamma_{\mathscr{F}} \times]0, T[\text{ 上}, \sigma_N = F_N$$

(6.10)
$$\begin{cases} |\sigma_T| < g = \mathscr{F}|F_N| \Longrightarrow \partial u_T/\partial t = 0 \\ |\sigma_T| = g \Longrightarrow \text{存在 } \lambda > 0 \text{ 使 } \partial u_T/\partial t = -\lambda\sigma_T \end{cases}$$

自然，初条件是

(6.11)
$$u(x, 0) = u_0(x), \ \partial u(x, 0)/\partial t = u_1(x) \text{当 } x \in \Omega \text{ 时}$$

为表示成变分形式，引入记号:

(6.12)
$$\begin{cases} a^0(u, v) = \int_\Omega a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx \\ a^1(u, v) = \int_\Omega a^{(1)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx \end{cases}$$

(6.13)
$$j(v) = \int_\Gamma g|v_T|d\Gamma$$

和(如 5.5.1 那样):

(6.14)
$$\mathscr{U}_{ad}(t) = \{v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v = U(t)\}$$

---

1) 这里用了线性化加速度，因为线性化形变张量出现在特性定律中。

则上述问题可象 5.5.1 那样提出,而 a 代以 a^0,还有一附加项 a^1(对应于粘性),即:

(6.15)
$$
\begin{aligned}
&(u''(t), v-u'(t)) + a^1(u'(t), v-u'(t)) \\
&\quad + a^0(u(t), v-u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \\
&\quad \geqslant (f(t), v-u'(t)) \\
&\quad + \int_{\Gamma_g} F_N(t)(v_N - u'_N(t))d\Gamma, \quad \forall v \in \mathscr{U}_{ad}(t)
\end{aligned}
$$

初条件是(6.11). □

注 6.1 若 $\mathscr{F}=0$(无摩擦情形),又若 $U=0$,(6.15)可简化为线性方程 $(\Gamma_F=\Gamma-\Gamma_U)$

(6.16)
$$
\begin{aligned}
&(u''(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) \\
&\quad = (f(t), v) + \int_{\Gamma_g} F_N v_N d\Gamma \text{ 在 } \Gamma_U \text{上 } v=0
\end{aligned}
$$

(若 $U \neq 0$,(6.16)中 v 代以 $v-u$). □

注 6.2 (类似于注 4.4 和 5.17) 无论Γ_U是空集或是正测集,我们可以同一方式处理问题(6.15). 但若 $\Gamma_U=\varnothing$,粘弹性体可有一整体运动,它分解为一刚体运动和一形变运动. 这时我们可把问题归结为(见注 4.4),对任意 t

(6.17)
$$
\begin{aligned}
&\left|(f(t), \rho) + \int_\Gamma F_N(t)\rho_N d\Gamma\right| \\
&\quad \leqslant \int_\Gamma g|\rho_T|d\Gamma, \quad \forall \rho \in \mathscr{R} \quad \square
\end{aligned}
$$

6.3 动态情形的存在性和唯一性定理

如 4.1 一样,引入 $\Phi(t)$[1],满足

(6.18) $$\Phi(t) \in (H^1(\Omega))^3, \text{ 在}\Gamma_U\text{上}\Phi(t) = U(t)$$

再引入

(6.19) $$V = (H^1(\Omega))^3$$

(6.20) $$V_0 = \{v \mid v \in V, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v = 0\}^{2)}$$

1) 若 $\Gamma_U=\varnothing$, Φ 代以 0.
2) 若 $\Gamma_U=\varnothing$, $V_0=V$.

u 代以 $u-\Phi$（并保留记号 u），问题归结为求 u，使

(6.21) $$u(t)\in V_0$$

(6.22) $$(u''(t), v-u'(t))+a^1(u'(t), v-u'(t)) + a^0(u(t), v-u'(t))+j(v+\Phi'(t)) - j(u'(t)+\Phi'(t))\geqslant (L(t), v-u'(t)), \quad \forall v\in V_0$$

其中

(6.23) $$(L(t), v)=(f(t), v) + \int_{\Gamma_{\mathscr{F}}} F_N(t)v_N d\Gamma-(\Phi''(t), v) - a^1(\Phi'(t), v)-a^0(\Phi(t), v)$$

初条件是

(6.24) $$\begin{cases} u(0)=u_0 \text{（事实上是 } u_0-\Phi(0)\text{）} \\ u'(0)=u_1 \text{（事实上是 } u_1-\Phi'(0)\text{）} \end{cases}$$

设 $H=(L^2(\Omega))^3$，$V_0\subset H\subset V_0'$，我们有

定理 6.1 设

(6.25) $f, f', f''\in L^2(0, T; H)$，$F$，$F_N'$，$F_N''\in L^2(\Gamma_{\mathscr{F}}\times]0, T[)$

(6.26) $\Phi, \Phi', \Phi''\in L^2(0, T; V)$，$\Phi''', \Phi^{(4)}\in L^2(0, T; H)$，
$\Phi(0)\in (H^2(\Omega))^3$

(6.27) g 不依赖于 t[1]，

(6.28) $$u_0\in (H^2(\Omega))^3$$

(6.29) $u_1\in V_0$ 在 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 上 $u_{1T}+\Phi_T'(0)=0$

(6.30) $(L(0), v)-a^0(u_0, v)-a^1(u_1, v)=(u_2, v)$，$u_2\in H$

在这些条件之下，有且仅有一个函数 u，使

(6.31) $$u, u'\in L^\infty(0, T; V_0)$$

(6.32) $$u''\in L^2(0, T; V_0)\cap L^\infty(0, T; H)$$

且满足(6.22)和(6.24)

注 6.3 性质(6.32)比(5.133)再强；它来源于粘性项

---

1) 若 $\mathscr{g}$ 不依赖于 t，这等于说 F_N 不依赖于 t，则(6.25)的第二部分自然成立。

$$a^1(u^1, v - u'). \square$$

证明. 唯一性可如 5.5.3 那样验证.

对于存在性，沿用 5.5.4 的方法，只给出证明的线索. 如(5.134)那样引入 j_ε.

正则化近似方程是

(6.33) $$(u_\varepsilon'', v) + a^1(u_\varepsilon', v) + a^0(u_\varepsilon, v) + (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v)$$
$$= (L(t), v) \forall v \in V_0, \ u_\varepsilon(0) = u_0, u_\varepsilon'(0) = u_1$$

取 $v = u_\varepsilon' + \Phi'$ 即得第一批先验估计.

注意对任意 $\lambda > 0$, 存在 $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ 使

(6.34) $$\begin{cases} a^0(v, v) + \lambda |v|^2 \geqslant \alpha_0 \|v\|^2, \ \alpha_0 > 0, \ \forall v \in V_0 \\ a^1(v, v) + \lambda |v|^2 \geqslant \alpha_1 \|v\|^2, \ \alpha_1 > 0 \end{cases}$$

且

(6.35) 若 Γ_U 有正测度，在(6.34)中可取 $\lambda = 0$

我们得到类似于(5.138)的估计，其左端为

$$|u_\varepsilon'(t)|^2 + \alpha_1 \int_0^t \|u_\varepsilon'(s)\|^2 ds + \alpha_0 \|u_\varepsilon(t)\|^2$$
$$- \lambda |u_\varepsilon(t)|^2 - \lambda \int_0^t |u_\varepsilon'(\sigma)|^2 d\sigma$$

由此推出(与(5.141)比较)

(6.36) $$|u_\varepsilon'(t)| + \|u_\varepsilon(t)\| \leqslant c$$

(6.37) $$\int_0^T \|u_\varepsilon'(t)\|^2 dt \leqslant c$$

为得第二批估计，如 5.5.4 那样推导.

必须有一对 $u_\varepsilon''(0)$ 的估计；在(6.33)中令 $t = 0$，并利用(6.79)即得

$$(u_\varepsilon''(0), v) = (L(0), v) - a^0(u_0, v) - a^1(u_1, v)$$
$$= (\text{根据}(6.30)) = (u_2, v)$$

于是

(6.38) $$u_\varepsilon''(0) = u_2$$

在(6.33)中对 t 求导数，再令 $v = u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)$，得到(与(5.152)比较)：

(6.39) $$|u_\epsilon''(t)| + \|u_\epsilon'(t)\| \leqslant c$$

(6.40) $$\int_0^T \|u_\epsilon''(t)\|^2 dt \leqslant c$$

如 5.5.4 那样对 ϵ 取极限。

注 6.4 同样可引入如 5.4.1 那样的其它边条件。

注 6.5 可以大大减弱定理 6.1 中的条件，得到的自然是"更弱"的解。确切地说有

定理 6.1′ 设

(6.25)′ $f \in L^2(0, T; H)$, $F_N \in L^2(\Gamma_g x]0, T[)$

(6.26)′ $\Phi, \Phi' \in L^2(0, T; V)$, $\Phi'' \in L^2(0, T; H)$

(6.28)′ $$u_0 \in V_0$$

(6.29)′ $$u_1 \in H$$

在这些条件下有且仅有一个函数 u，使

(6.31)′ $u \in L^\infty(0, T; V_0)$, $u' \in L^2(0, T; V_0) \cap L^\infty(0, T; H)$

(6.32)′ $$u'' \in L^2(0, T; V_0')$$

满足(6.22),(6.24)。

事实上，仍从(6.33)的解 u_ϵ 出发，得到估计(6.36),(6.37)。于是从(6.33)推出

$$(u_\epsilon'', v) = (L(t), v) - a^1(u_\epsilon', v) - a^0(u_\epsilon, v) - (j_\epsilon'(u_\epsilon' + \Phi'), v)$$

特别由此得，u_ϵ'' 组成 $L^2(0, T; V_0')$ 中的一有界集。用与前面相同的方法即得定理。 □

6.4 拟静态问题. 变分提法

由于粘性项的出现，特性定律 (6.4) 依赖于时间，因而不可能如(无粘性的)弹性情形那样考虑静态问题。

但若当 $t \geqslant t_0 > 0$ 时力或已知位移变化很小，并且人们感兴趣的是当 $t \geqslant t_0$ 时的解，则习惯上[1]在运动方程中要略去线性化加

1) 在 6.7 中将看到在多大程度上这是合理的，至少在无摩擦的情形。

速度项 $\partial^2 u_i/\partial t^2$: 此即拟静态情形。 □

考虑到特性定律(6.4),在每一时刻 t 的平衡方程是

$$(6.41)\qquad -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(1)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - \frac{\partial}{\partial x_j}a^{(0)}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) = f_i, \text{ 在 } \Omega\times]0, T[\text{ 内}$$

边条件(6.8),(6.9),(6.10)不变,而初条件是

$$(6.42)\qquad u(0) = u_0$$

这就导致问题: 求 $u(t)$, 满足

$$(6.43)\qquad \left|\begin{aligned}&u'(t)\in \mathscr{U}_{ad}(t)\\&a^1(u'(t), v-u'(t)) + a^0(u(t), v-u'(t))\\&\qquad + j(u) - j(u'(t)) \geqslant (f(t), v-u'(t))\\&\qquad + \int_{\Gamma_g} F_N(t)(v-u'(t))d\Gamma, \ \forall v\in \mathscr{U}_{ad}(t)\end{aligned}\right.$$

和初条件(6.42)。

这里必须仔细区分两种情形: $\mathrm{Mes}\Gamma_U > 0$ 和 $\Gamma_U = \varnothing$。从情形 "$\mathrm{Mes}\Gamma_U > 0$" 开始。

6.5 Γ_U 有正测度情形的存在性和唯一性定理

仍引入满足(6.18)的 $\Phi(t)$ 并以 $u-\Phi$ 代替 u。问题转化为: 求 u, 满足

$$(6.44)\qquad u(t)\in V_0$$

$$(6.45)\qquad \begin{aligned}&a^1(u'(t), v-u'(t)) + a^0(u(t), v-u'(t))\\&\qquad + j(v+\Phi'(t)) - j(u'(t)+\Phi'(t))\\&\qquad \geqslant (L_1(t), v-u'(t)), \ \forall v\in V_0\end{aligned}$$

其中

$$(6.46)\qquad \begin{aligned}(L_1(t), v) &= (f(t), v)\\&\quad + \int_{\Gamma_g} F_N(t)v_N d\Gamma - a^1(\Phi'(t), v) - a^0(\Phi(t), v),\end{aligned}$$

u 还满足初条件

(6.47) $$u(0)=u_0(=u_0-\Phi(0))$$

我们将证明

定理 6.2 假定

(6.48) $$f\in L^2(0,T;H),\ F_N\in L^2(\Gamma_g\times]0,T[)$$

(6.49) $$\Phi,\ \Phi'\in L^2(0,T;V)$$

(6.50) $$u_0\in V_0$$

在这些条件下，有且仅有一个函数 u，使得

(6.51) $$u\in L^\infty(0,T;V_0)$$

(6.52) $$u'\in L^2(0,T;V_0)$$

u 满足(6.45)[1]和(6.47)。

注 6.6 这里的假设与定理 6.1 的假设类似。

唯一性的证明。设 u 和 u_* 是两个可能的解。在(6.45)中取 $v=u_*'(t)$（相应地，在关于 u_* 的不等方程中取 $v=u'(t)$）并相加，令 $w=u-u_*$，即得

$$-a^1(w'(t),w'(t))-a^0(w(t),w'(t))\geqslant 0$$

或[2]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a^0(w(t))+a^1(w'(t))\leqslant 0$$

由此 $a^0(w(t))=0$。从而 $w(t)=0$，因为 a^0 和 a^1 满足

(6.53) $$a^i(v)\geqslant\alpha_i\|v\|^2,\ \alpha_i>0,\ \forall v\in V_0$$[3]□

存在性的证明 仍然从一个正则化方程出发。

j_ε 由(5.134)定义，要求 u_ε，满足

(6.54) $$\begin{cases}a^1(u_\varepsilon'(t),v)+a^0(u_\varepsilon(t),v)+(j_\varepsilon'(u_\varepsilon'(t)\\ \qquad+\Phi'(t)),v)=(L_1(t),v),\ \forall v\in V_0\\ u_\varepsilon(0)=u_0\end{cases}$$

用一新的逼近以解这个问题，例如引入 $\eta>0$，$u_{\varepsilon\eta}$ 是如下问题的解：

---

1) 确切地说，可能除去 t 的一零测集外，(6.45)对 V_0 中所有的 v 成立。

2) 令 $a^i(v,v)=a^i(v)$。

3) 因为 $\mathrm{Mes}\Gamma_U>0$。

$$
(6.55)\quad \begin{cases} \eta(u''_{\varepsilon\eta}(t), v) + a^1(u'_{\varepsilon\eta}(t), v) + a^0(u_{\varepsilon\eta}(t), v) \\ \qquad + (j'_\varepsilon(u'_{\varepsilon\eta}(t) + \Phi'(t)), v) \\ \quad = (L_1(t), v), \ \forall v \in V_0 \\ u_{\varepsilon\eta}(0) = u_0, \ u'_{\varepsilon\eta} = 0 \ (\text{比方这样取}) \end{cases}
$$

令 η 趋于零，即得(6.54)的解 u_ε.

在(6.54)中令 $v = u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)$，由于 $(j'_\varepsilon(\varphi), \varphi) \geqslant 0$，即得

$$
\begin{aligned} a^1(u'_\varepsilon(t)) + a^0(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) \leqslant & - a'_\varepsilon(u'_\varepsilon(t), \Phi'(t)) \\ & - a^0(u_\varepsilon(t), \Phi'(t)) + (L_1(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) \end{aligned}
$$

由此

$$
\begin{aligned} & \int_0^t a_1(u'_\varepsilon(s))ds + \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(t)) \\ & \quad \leqslant \frac{1}{2} a^0(u_0) - \int_0^t a'(u'_\varepsilon, \Phi')ds \\ & \qquad - \int_0^t a^0(u_\varepsilon, \Phi')ds + \int_0^t (L_1, u'_\varepsilon + \Phi')ds \end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned} & \int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \\ & \quad \leqslant c \left[\int_0^t (\|u'_\varepsilon(s)\| + \|u_\varepsilon\|) M(s) ds + 1 \right] \\ & \quad M \in L^2(0, T) \end{aligned}
$$

由此

$$
\begin{aligned} & \int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \\ & \quad \leqslant \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 ds \\ & \qquad + c \left[\int_0^t M(s)^2 ds + 1 \right] \end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned} & \int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \\ & \quad \leqslant \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 ds + c \end{aligned}
$$

即有

(6.56) $$\|u_\varepsilon(t)\| \leqslant c, \quad \int_0^T \|u_\varepsilon'(t)\|^2 dt \leqslant c$$

于是可从 u_ε 取一个序列，仍记 u_ε，满足

(6.57) $$\begin{cases} u_\varepsilon \to u, & 在\ L^\infty(0, T; V_0)\ 中弱^* \\ u_\varepsilon' \to u', & 在\ L^2(0, T; V_0)\ 中弱 \end{cases}$$

而由于函数 $v \to j_\varepsilon(v)$ 是凸的，

(6.58) $$j_\varepsilon(v + \Phi'(t)) - j_\varepsilon(u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)) - (j_\varepsilon'(u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)), v - u_\varepsilon'(t)) \geqslant 0$$

由(6.54)得

(6.59) $$\begin{aligned} &a^1(u_\varepsilon'(t), v - u_\varepsilon'(t)) + a^0(u_\varepsilon(t), v - u_\varepsilon'(t)) \\ &\quad + j_\varepsilon(v + \Phi'(t)) - j_\varepsilon(u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t)) \\ &\geqslant (L_1(t), v - u_\varepsilon'(t)) \end{aligned}$$

设 $v \in L^2(0, T; V_0)$. 在(6.59)中取 $v = v(t)$ 并积分之，即有

(6.60) $$\begin{aligned} \int_0^T [&a^1(u_\varepsilon', v - u_\varepsilon') + a^0(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon') + j_\varepsilon(v + \Phi') \\ &- j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') - (L_1, v - u_\varepsilon')] dt \geqslant 0 \end{aligned}$$

或

(6.61) $$\begin{aligned} \int_0^T [&a^1(u_\varepsilon', v) + a^0(u_\varepsilon, v) + j_\varepsilon(v + \Phi') \\ &- (L_1, v - u_\varepsilon')] dt \geqslant \int_0^T a^1(u_\varepsilon') dt \\ &+ \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(T)) + \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') dt \\ &- \frac{1}{2} a^0(u_0) \end{aligned}$$

由于

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^T a^1(u_\varepsilon') dt + \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(T)) + \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi') dt\right]$$

$$\geqslant \int_0^T a^1(u')dt + \frac{1}{2} a^0(u(T))$$
$$+ \int_0^T j(u' + \Phi')dt$$

由(6.61)推知

(6.62)
$$\int_0^T [a^1(u', v - u') + a^0(u, v - u') + j(v + \Phi) - j(u' + \Phi') - (L_1, v - u')]dt \geqslant 0,$$
$$\forall v \in L^2(0, T; V_0)$$

用第一章 5.6.3 同一手续过渡到逐点不等式(6.45). □

6.6 $\Gamma_U = \varnothing$ 情形的研究

当 $\Gamma_U = \varnothing$ 时,取前面的 $\Phi(t) = 0$. 于是,问题为求 u, 满足

(6.63)
$$u(t) \in V(=(H^1(\Omega))^3)$$

(6.64)
$$a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geqslant (L_2(t), v - u'(t)),$$
$$\forall v \in V$$

其中

(6.65)
$$(L_2(t), v) = (f(t), v) + \int_\Gamma F_N(t) v_N d\Gamma$$

还满足初条件(6.47).

在(6.64)中取 $v = u'(t) + \rho$, $\rho \in \mathscr{R}$, 并注意到
$$a^0(\varphi, \rho) = 0, \ a^1(\varphi, \rho) = 0, \ \forall \varphi \in V$$

即有
$$j(u'(t) + \rho) - j(u'(t)) \geqslant (L_2(t), \rho)$$

又由于
$$j(u'(t) + \rho) - j(u'(t)) \leqslant j(\rho)$$

便得
$$(L_2(t), \rho) \leqslant j(\rho)$$

或(由于 $j(\rho) = j(-\rho)$):

(6.66)
$$|(L_2(t), \rho)| \leqslant j(\rho), \ \forall \rho \in \mathscr{R}, \ \forall t \in [0, T]$$

我们将看到，必要条件(6.66)对于某种意义上能够解决前述问题是充分的.

我们要过渡到关于 $\mathscr{R}$ 的商. 如(3.47),(3.48)引入:

(6.67) $$\dot{V} = V/\mathscr{R},\ \dot{H} = H/\mathscr{R}$$

(6.68) $$a^i(\dot{u},\dot{v}) = a^i(u,v), u\in\dot{u}, v\in\dot{v}, i=0,1$$

根据定理 3.4,我们有

(6.69) $$a^i(\dot{v}) = a^i(\dot{v},\dot{v}) \geqslant \alpha\|\dot{v}\|^2_{\dot{V}}, \alpha>0, i=0,1$$

此外定义

(6.70) $$\mathscr{H}(t;\dot{v}) = \operatorname*{Inf}_{\rho\in\mathscr{R}}[j(v+\rho)-(L_2(t),v+\rho)].$$

注意,若(6.66)成立,则

(6.71) $$\mathscr{H}(t;\dot{v}) > -\infty$$

事实上,取 $v=\dot{v}$ 中的任一固定元素,有

$$j(v+\rho)\geqslant j(\rho)-j(v)$$

于是

$$\begin{aligned} j(v+\rho)-(L_2(t),v+\rho) &\geqslant j(\rho)-(L_2(t),\rho) \\ -j(v)-(L_2(t),v) &\geqslant -j(v)-(L_2(t),v) \end{aligned}$$

(根据 (6.66))

即得(6.71). 然后,往证

定理 6.3 假定

(6.72) $$f\in L^2(0,T;H),\ F_N\in L^2(\Gamma\times]0,T[)$$

(6.73) $$u_0\in V$$

且(6.66)对几乎所有的 t 成立,其中 L_2 由(6.65)定义,则有且仅有一函数 $\dot{u}$, 它满足

(6.74) $$\dot{u}\in L^\infty(0,T;\dot{V})$$

(6.75) $$\dot{u}'\in L^2(0,T;\dot{V})$$

(6.76) $$\dot{u}(0)=\dot{u}_0$$

和

(6.77) $$\begin{aligned} a^1(\dot{u}'(t),\dot{v}-\dot{u}'(t)) &+ a^0(\dot{u}(t),\dot{v}-\dot{u}'(t)) \\ &+ \mathscr{H}(t;\dot{v})-\mathscr{H}(t;\dot{u}'(t))\geqslant 0,\ \forall\dot{v}\in\dot{V} \end{aligned}$$

注 6.7 在无摩擦时 $j=0$. 应设

(6.78) $$(L_2(t),\ \rho)=0,\ \forall\rho\in\mathscr{R}$$
这时
(6.79) $$\mathscr{H}(t;v^*)=-(L_2(t),v^*)$$
而(6.77)简化为方程
(6.80) $$a^1(u^{*\prime}(t),v)+a^0(u^*(t),v)$$
$$=(L_2(t),v^*),\forall v^*\in V^*\square$$

定理 6.3 的证明. 唯一性可如定理 6.2 一样证明,因为由于过渡到对$\mathscr{R}$的商(和 Korn 不等式),(6.69)成立.

对存在性,可用定理 6.2,其中 $a^1(u,v)$ 代以 $a^1(u,v)+\varepsilon(u,v)$, $\varepsilon>0$, 而 $a^0(u,v)$ 不变[1]于是存在(唯一的) u_ε, 满足 $u_\varepsilon\in L^\infty(0,T;V)$, $u_\varepsilon'\in L^2(0,T;V)$,

(6.81) $$a^1(u_\varepsilon',v-u_\varepsilon')+\varepsilon(u_\varepsilon',v-u_\varepsilon')+a^0(u_\varepsilon,v-u_\varepsilon')$$
$$+j(v)-j(u_\varepsilon')\geqslant(L_2,\ v-u_\varepsilon'),\ \forall v\in V$$
$u_\varepsilon(0)=u_0$

在(6.81)中令 $v=0$, 我们推出

$$a^1(u_\varepsilon'(t))+\varepsilon|u_\varepsilon'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a^0(u_\varepsilon(t))$$
$$\leqslant(L_2(t),u_\varepsilon'(t))-j(u_\varepsilon'(t))$$
$$=(L_2(t),u_\varepsilon'(t)+\rho)-(L_2(t),\rho)-j(u_\varepsilon'(t))$$
$$\leqslant(L_2(t),u_\varepsilon'(t)+\rho)+j(\rho)-j(u_\varepsilon'(t))\ (\text{根据}(6.66))$$
$$\leqslant(L_2(t),\ u_\varepsilon'(t)+\rho)+j(u_\varepsilon'(t)+\rho)$$
$$\leqslant c(1+\|L_2(t)\|_*)\|u_\varepsilon'(t)+\rho\|,\ \forall\rho$$
对 ρ 取下确界,即得

$$\text{左端}\leqslant c(1+\|L_2(t)\|_*)\inf_\rho\|u_\varepsilon'(t)+\rho\|$$
$$=c(1+\|L_2(t)\|_*)\|u_\varepsilon^{\cdot\prime}(t)\|_{\dot V}$$
根据(6.69)由此有

---

1) 当 $a^1(v)\geqslant\alpha\|v\|^2$, $\alpha>0$ 而 $a^0(v)\geqslant0$, $a^0(v)+\lambda|v|^2\geqslant\alpha\|v\|^2$, $\lambda>0$, 定理6.2成立.

$$\alpha\int_0^t \|u_\varepsilon''(s)\|_V^2 \cdot ds + \frac{1}{2}\alpha\|u_\varepsilon'(t)\|_V^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2}a^0(u_0) + c\int_0^t (1 + \|L_2(s)\|_*)\|u_\varepsilon''(s)\|_{V'}ds$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\alpha\int_0^t \|u_\varepsilon''(s)\|_V^2 \cdot ds + c$$

因此

$$\|u_\varepsilon'(t)\|_{V'}^2 + \int_0^t \|u_\varepsilon''(s)\|_{V'}^2 ds \leqslant c \tag{6.82}$$

于是可从 u_ε 取一序列，仍记 u_ε，满足

(6.83) $\begin{cases} u_\varepsilon' \to u^{\cdot}, \text{ 在 } L^\infty(0,T;V^{\cdot}) \text{ 中弱*} \\ u_\varepsilon'' \to u^{\cdot\prime}, \text{ 在 } L^2(0,T;V^{\cdot}) \text{ 中弱} \end{cases}$

同样有

$$\varepsilon\int_0^T |u_\varepsilon''(t)|^2 dt \leqslant c \tag{6.84}$$

我们把(6.81)写成

$$\varepsilon(u_\varepsilon', v - u_\varepsilon') + a^1(u_\varepsilon'', v^{\cdot} - u_\varepsilon'') + a^0(u_\varepsilon', v^{\cdot} - u_\varepsilon'')$$

$$+ j(v) - (L_2(t), v) \geqslant [j(u_\varepsilon'(t)) - (L_2(t), u_\varepsilon'(t))]$$

$$\geqslant \operatorname{Inf}[j(u_\varepsilon'(t) + \rho) - (L_2(t), u_\varepsilon'(t) + \rho)]$$

$$= \mathscr{H}(t; u_\varepsilon''(t))$$

由此若 $v \in L^2(0,T;V)$，则

$$\varepsilon\int_0^T (u_\varepsilon', v - u_\varepsilon')dt + \int_0^T [a^1(u_\varepsilon'', v^{\cdot} - u_\varepsilon'') + a^0(u_\varepsilon', v^{\cdot} - u_\varepsilon'') + j(v) - (L_2, v)]dt \geqslant \int_0^T \mathscr{H}(t; u_\varepsilon'')dt \tag{6.58}$$

而 $v^{\cdot} \to \int_0^T \mathscr{H}(t; v^{\cdot})dt$ 在 $L^2(0,T;V^{\cdot})$ 上对弱拓扑下半连续，因此

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \mathscr{H}(t; u_\varepsilon'')dt \geqslant \int_0^T \mathscr{H}(t; u^{\cdot})dt \tag{6.86}$$

把(6.85)写成

$$\int_0^T [\varepsilon(u_\varepsilon', v) + a^1(u_\varepsilon'', v) + a^0(u_\varepsilon, v^*) + j(v)$$

$$- (L_2, v)]dt \geqslant \int_0^T \mathscr{H}(t; u_\varepsilon'')dt$$

$$+ \varepsilon \int_0^T |u_\varepsilon'|^2 dt + \int_0^T a^1(u_\varepsilon'')dt$$

$$+ \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(T)) - \frac{1}{2} a^0(u_0)$$

由此

$$\int_0^T [a^1(u^{*\prime}, v^*) + a^0(u^*, v^*) + j(v) - (L_2, v)]dt$$

$$\geqslant \int_0^T \mathscr{H}(t; u^{*\prime})dt + \int_0^T a^1(u^{*\prime})dt$$

$$+ \frac{1}{2} a^0(u^*(T)) - \frac{1}{2} a^0(u_0)$$

因而

$$(6.87) \quad \int_0^T [j(v) - (L_2, v)]dt$$

$$\geqslant \int_0^T [-a^1(u^{*\prime}, v^* - u^{*\prime}) - a^0(u^*, v^* - u^{*\prime})$$

$$+ \mathscr{H}(t; u^*)]dt$$

用第一章 5.6.3 的同样步骤，我们由此推出，可能除一$[0,T]$ 中的零测集 E 的点 t，我们有

$$(6.88) \quad j(v) - (L_2, v) \geqslant - a^1(u^{*\prime}(t), v^* - u^{*\prime}(t))$$

$$- a^0(u^*(t), v^* - u^{*\prime}(t)) + \mathscr{H}(t; u^{*\prime}(t)),$$

$$\forall v \in V$$

若把 v 换成 $v + \rho$，则右端不变，于是(6.88)等价于

$$(6.89) \quad \operatorname*{Inf}_{\rho} [j(v + \rho) - (L_2, v + \rho)] \geqslant - a^1(u^{*\prime}(t),$$

$$v^* - u^{*\prime}(t)) - a^0(u^*(t), v^* - u^{*\prime}(t))$$

$$+ \mathscr{H}(t; u^{*\prime}(t))$$

上式左端正是 $\mathscr{H}(t; v^*)$，由此得(6.77)。 □

6.7 无摩擦问题中拟静态的验证

6.7.1 问题的提出

我们考虑(在 6.2 和 6.3 研究过)动态情形,设

(6.90) U_i, f_i 和 F_N 不依赖于 $t \geq 0$[1],

假定初值为零:

(6.91) $$u_0 = 0, \quad u_1 = 0$$

于是对 $t < 0$ 材料处于未形变的状态.

"拟静态假设"是说,在通常情形[2],在条件(6.90),(6.91)之下,动力学问题和拟静态问题的解是"相近的".

实际上我们要证明,当没有摩擦时,情形正是这样.

在"带摩擦"情形相应的问题尚未解决,且看来是有意义的.

由于没有摩擦,动力情形的解 u 满足

(6.92) $$\begin{cases} (u''(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) \\ \qquad = (L, v), \quad \forall v \in V_0 \\ u(t) \in V_0 \end{cases}$$

这里

(6.93) $$(L, v) = (f, v) - a^0(\Phi, v)$$ []

我们将作稍许推广,我们记得(见5.1.2)为叙述简便曾取 $\Gamma_U = \Gamma - \Gamma_F$. 事实上(用第 2 节的记号),

$$\Gamma - \Gamma_F = \Gamma_U \cup \Gamma_F$$

这里由于 $\Gamma_F = \varnothing$, 则

(6.94) $$\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F$$

给定的是

(6.95) 在 Γ_U 上 $u_i = U_i$, U_i 不依赖于 t

(6.96) 在 Γ_F 上 $\sigma_{ij}n_j = F_i$, F_i 不依赖于 t

由此最后有

---

1) 这些个条件可以放宽,见注 6.8.

2) 即无摩擦情形.

$$(6.97)\quad \begin{cases} (u''(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) \\ \qquad = (L, v), v \in V_0, u(t) \in V_0 \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

其中

$$(6.98)\quad (L, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma - a^0(\Phi, v)$$

用 $\tilde{u}(t)$ 表示相应拟静态问题的解，即

$$(6.99)\quad \begin{cases} a^1(\tilde{u}(t), v) + a^0(\tilde{u}(t), v) = (L, v), \\ \qquad v \in V_0, \tilde{u}(t) \in V_0 \\ \tilde{u}(0) = 0 \end{cases}$$

现在我们的目的是证明 u 和 $\tilde{u}$ 在某种意义下是相近的，我们要区分两种情形，$\mathrm{Mes}\Gamma_U > 0$ 和 $\Gamma_U = \emptyset$。[]

6.7.2 "Mes $\Gamma_U > 0$" 的情形

我们将把 u 和 $\tilde{u}$ 与下列稳定问题的解 $\bar{u}$ 比较：

$$(6.100)\quad a^0(\bar{u}, v) = (L, v), \ \forall v \in V_0, \bar{u} \in V_0$$

当 $\mathrm{Mes}\,\Gamma_U > 0$，此问题有唯一解. 经证

定理 6.4 设 $\mathrm{Mes}\Gamma_U > 0$，又(6.95)，(6.96)成立，则存在常数 $\gamma > 0$ 和 c，使

$$(6.101)\quad \|u(t) - \bar{u}\| \leqslant ce^{-\gamma t}$$

$$(6.102)\quad |u'(t)| \leqslant ce^{-\gamma t}, \ e^{\gamma t}u' \in L^2(0, \infty; V)$$

定理 6.5 在定理6.4的假设下，存在常数 $\gamma > 0$ 和 c 使

$$(6.103)\quad \|\tilde{u}(t) - \bar{u}\| \leqslant ce^{-\gamma t}$$

$$(6.104)\quad e^{\gamma t}\tilde{u}' \in L^2(0, \infty; V)$$

推论 6.1 (拟稳态情形的验证) 在定理 6.4 的假设之下，存在常数 $\gamma > 0$ 和 c 使

$$(6.105)\quad \begin{cases} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant ce^{-\gamma t} \\ e^{\gamma t}(u' - \tilde{u}') \in L^2(0, T; V) \end{cases}$$

定理 6.4 的证明. 函数 $w(t) = u(t) - \bar{u}$ 满足

$$(6.106)\quad (w''(t), v) + a^1(w'(t), v) + a^0(w(t), v) = 0$$

和

(6.107) $$w(0) = -\bar{u},\ w'(0) = 0$$

令

(6.108) $$w(t) = e^{-\lambda t}z(t),\ \lambda > 0 \text{ 待定}$$

那么(6.106)给出

(6.109) $$\begin{aligned}(z''(t), v) &+ a^1(z'(t), v) - 2\lambda(z'(t), v) \\ &+ a^0(z(t), v) + \lambda^2(z(t), v) \\ &- \lambda a^1(z(t), v) = 0\end{aligned}$$

选取 λ 充分小，使

(6.110) $$a^0(v) - \lambda a^1(v) + \lambda^2|v|^2 \geqslant \beta\|v\|^2,\quad \beta > 0,\ \forall v \in V_0,$$

(6.111) $$a^1(v) - 2\lambda|v|^2 \geqslant 0,\ \forall v \in V_0$$

在(6.109)中取 $v = z'(t)$ 即得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a^0(z(t)) + \lambda^2|z(t)|^2 - \lambda a^1(z(t))] + a^1(z'(t)) - 2\lambda|z'(t)|^2 = 0$$

由此

$$\begin{aligned}|z'(t)|^2 &+ a^0(z(t)) + \lambda^2|z(t)|^2 - \lambda a^1(z(t)) \\ &+ 2\int_0^t (a^1(z') - 2\lambda|z'|^2)ds \\ &= |z'(0)|^2 + a^0(z(0)) + \lambda^2|z(0)|^2 - \lambda a^1(z(0))\end{aligned}$$

由(6.110)和(6.111)即得

(6.112) $$|z'(t)|^2 + \beta\|z(t)\|^2 \leqslant C$$

由此推出(6.101)和(6.102)的第一个不等式。但可选取 λ，使代替(6.111)，我们有

(6.113) $$a^1(v) - 2\lambda|v|^2 \geqslant \beta\|v\|^2$$

($\beta > 0$；"最好的" β 不必与(6.110)中的相同)这时得到

$$|z'(t)|^2 + \|z(t)\|^2 + \int_0^t \|z'(s)\|^2 ds \leqslant C$$

因此

$$\int_0^\infty \|z'(s)\|^2 ds \leqslant C \tag{6.114}$$

而

$$e^{\lambda t} w' = z' - \lambda z$$

对 $\gamma < \lambda$ 给出

$$e^{\gamma t} w' = e^{(\gamma-\lambda)t} z' - \lambda e^{(\gamma-\lambda)t} z \in L^2(0, \infty; V)$$

由此即得(6.102)的第二部分. □

定理 6.5 的证明. 函数 $\tilde{w}(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{u}$ 满足

$$a^1(\tilde{w}'(t), v) + a^0(\tilde{w}(t), v) = 0 \tag{6.115}$$

变换(6.108)导出

$$a^1(z'(t), v) + a^0(z(t), v) - \lambda a^1(z(t), v) = 0 \tag{6.116}$$

选择 λ 满足[1]

$$a^0(v) - \lambda a^1(v) \geqslant \beta \|v\|^2 \tag{6.117}$$

在(6.116)中取 $v = z'(t)$ 即得

$$\|z(t)\|^2 + \int_0^t \|z'(s)\|^2 ds \leqslant C$$

由此如前面那样,即得结果. □

注 6.8 若 U_i, f_i 和 F_N 依赖于 t, 只要能选 $\Phi(t)$, 使对充分小的 $\lambda > 0$ 有

$$\begin{cases} e^{\lambda t}\|L(t) - L\|_* \leqslant C \\ \displaystyle\int_0^\infty \left\| \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} L(t)\right) \right\|_* dt < \infty \end{cases} \tag{6.118}$$

我们可证明,类似结果成立.

6.7.3 $\Gamma_U = \varnothing$ 的情形

若 $\Gamma_U = \varnothing$, 拟静态问题(6.99)仅当 L 满足

$$(L, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathscr{R} \tag{6.119}$$

时才有解. 在这些条件下,可在(6.99)中"过渡到关于 $\mathscr{R}$ 的商"; 这时拟静态问题有唯一解 $\tilde{u}'$, 满足

---

1) λ (因而 γ) 的最佳选择不必与前面相同.

(6.120) $\tilde{u}^{\cdot} \in L^{\infty}(0, T; V^{\cdot}), \tilde{u}^{\cdot\prime} \in L^2(0, T; V^{\cdot})$

(6.121) $a^1(\tilde{u}^{\cdot\prime}(t), v^{\cdot}) + a^0(\tilde{u}^{\cdot}(t), v^{\cdot}) = (L, v^{\cdot}), \ \forall v^{\cdot} \in V^{\cdot}$

此外，在(6.97)中令 $v = \rho$，我们发现

$$(u''(t), \rho) = 0$$

由于 $u(0) = 0$，$u'(0) = 0$，由此得

(6.122) $$(u(t), \rho) = 0, \ \forall \rho \in \mathscr{R}$$

我们把 u 跟下列问题的解 $u^{\cdot}$ 等同：

(6.123) $$(u^{\cdot\prime\prime}(t), v^{\cdot}) + a^1(u^{\cdot\prime}(t), v^{\cdot}) + a^0(u^{\cdot}(t), v^{\cdot}) = (L, v^{\cdot}), \ \forall v^{\cdot} \in V^{\cdot}$$

但过渡到商之后，就有性质(6.69)．因而情况与 6.7.2 类似，只是在空间 $V^{\cdot}$ 中考虑问题．引进下列问题的解 $\bar{u}^{\cdot}$：

(6.124) $$a^0(\bar{u}^{\cdot}, v^{\cdot}) = (L, v^{\cdot})$$

于是，改写定理 6.4 和 6.5，我们有 ($H^{\cdot} = H/\mathscr{R}$)：

定理 6.6 设 $\Gamma_U = \varnothing$，又(6.96)在 $\Gamma_F = \Gamma$ 上成立，(6.119)成立，则存在 $\gamma > 0$ 和 C 使

(6.125) $$\|u^{\cdot}(t) - \bar{u}^{\cdot}\|_V \leqslant ce^{-\gamma t},$$

(6.126) $$\|u^{\cdot\prime}(t)\| \leqslant ce^{-\gamma t}, \ e^{\gamma t}u^{\cdot\prime} \in L^2(0, \infty; V^{\cdot})$$

定理 6.7 在定理 6.6 的假设之下，存在 $\gamma > 0$ 和 C 使

(6.127) $$\|\tilde{u}^{\cdot}(t) - \bar{u}^{\cdot}\|_{V^{\cdot}} \leqslant ce^{-\gamma t}.$$

(6.128) $$e^{\gamma t}\tilde{u}^{\cdot\prime} \in L^2(0, \infty; V^{\cdot})$$

与推论 6.1 相应的推论亦成立． □

6.8 作为带粘性情形极限的无粘性情形

我们考虑一种材料，其特性定律是(与(6.4)比较)：

(6.129) $$\sigma_{ij} = a_{ijkh}^{(0)}\varepsilon_{kh} + \lambda a_{ijkh}^{(1)}\partial\varepsilon_{kh}/\partial t$$

其中 $\lambda > 0$，并令 λ 趋于零；换句话说，"粘性要趋于零"．

我们的目的是验证当 $\lambda \to 0$ 时作为"粘性"情形的极限而得到第 5 节的"弹性"情形． □

用定理 6.1 的记号，以 u_λ 表示

(6.130) $$u_\lambda(t) \in V_0$$

$$
(6.131)\quad \left|\begin{array}{l}
(u_\lambda''(t), v - u_\lambda'(t)) + \lambda a'(u_\lambda'(t), v - u_\lambda'(t)) \\
\quad + a^0(u_\lambda(t), v - u_\lambda'(t)) + j(v + \Phi'(t)) \\
\quad - j(u_\lambda'(t) + \Phi'(t)) \geqslant (L(t), v \\
\quad - u_\lambda'(t)), \ \forall v \in V_0
\end{array}\right.
$$

的解，满足初条件

$$
(6.132)\quad u_\lambda(0) = u_0, \ u_\lambda'(0) = u_1
$$

经证

定理 6.8 保留定理 6.1 的假设. 又设

$$
(6.133)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{存在 } \hat{u}_2, u_3 \in H \text{ 使} \\
(L(0), v) - a^0(u_0, v) = (\hat{u}_2, v) \\
a'(u_1, v) = (u_3, v), \ \forall v \in V_0
\end{array}\right.
$$

[1]

则当 $\lambda \to 0$ 时有

$$
(6.134)\quad \left|\begin{array}{l}
u_\lambda \to u, u_\lambda' \to u', \text{ 在 } L^\infty(0, T; V_0) \text{ 中弱}^* \\
u_\lambda'' \to u'', \text{ 在 } L^\infty(0, T; H) \text{ 中弱}^*
\end{array}\right.
$$

这里 u 是定理 5.7 给出的"弹性"情形的解又

$$
(6.135)\quad \lambda^{1/2} u_\lambda' \text{ 在 } L^2(0, T; V_0) \text{ 中有界}
$$

证明. 如(6.33),考虑近似正则化方程

$$
(6.136)\quad \left|\begin{array}{l}
(u_{\varepsilon\lambda}'', v) + \lambda a'(u_{\varepsilon\lambda}', v) + a^0(u_{\varepsilon\lambda}, v) \\
\quad + (j_{\varepsilon\lambda}'(u_{\varepsilon\lambda}' + \Phi'), v) = (L, v) \\
u_{\varepsilon\lambda}(0) = u_0, \ u_{\varepsilon\lambda}'(0) = u_1
\end{array}\right.
$$

在(6.136)中取 $v = u_{\varepsilon\lambda}' + \Phi'$, 即得类似于(6.36), (6.37) 的估计,注意因子 λ 的出现,则有

$$
(6.137)\quad |v_{\varepsilon\lambda}'(t)| + \|u_{\varepsilon\lambda}(t)\| \leqslant c
$$

$$
(6.138)\quad \lambda \int_0^T \|u_{\varepsilon\lambda}'(t)\|^2 dt \leqslant c
$$

为得到第二批先验估计,可如定理 6.1 的证明中那样推导. 首先,在(6.136)中令 $t = 0$, 利用定理6.1的假设和(6.133),即得

$$
(6.139)\quad u_{\varepsilon\lambda}''(0) = \hat{u}_2 - \lambda u_3 \text{ (从而在}H\text{中有界)}
$$

---

1) 这一假设蕴涵 (6.30).

在(6.136)中对 t 求导，尔后以 $u''_{\varepsilon\lambda}$ 代 v 即得(与(6.39)，(6.40)比较)：

(6.140) $$|u''_{\varepsilon\lambda}(t)| + \|u'_{\varepsilon\lambda}(t)\| \leqslant c$$

(6.141) $$\lambda\int_0^T |u''_{\varepsilon\lambda}(t)|^2 dt \leqslant c$$

对 ε 取极限即证明(6.130)，(6.131)，(6.132)的(唯一)解 u_λ 满足：当 $\lambda\to 0$ 时

(6.142) $$\begin{cases} u_\lambda,\ u'_\lambda \text{ 在 } L^\infty(0,T;V_0) \text{ 中有界} \\ u''_\lambda \text{ 在 } L^\infty(0,T;H) \text{ 中有界} \end{cases}$$

且满足(6.135)。

于是可从 λ 取一序列，仍记 λ，$\lambda\to 0$，使(6.134)成立，由此即得定理，只要我们验证了如此得到的 u 是"弹性"解。

在(6.131)中令 $v=v(t)$，这里 $v(\cdot)\in L^2(0,T;V_0)$，由此得到

$$\begin{aligned}\int_0^T[(u''_\lambda, v) + \lambda a^1(u'_\lambda, v) + a^0(u_\lambda, v) + j(v+\Phi') \\ - (L, v-u'_\lambda)]dt \geqslant \int_0^T[(u''_\lambda, u'_\lambda) \\ + \lambda a'(u'_\lambda, u'_\lambda) + a^0(u_\lambda, u'_\lambda) \\ + j(u'_\lambda+\Phi')]dt \geqslant \frac{1}{2}|u'_\lambda(T)|^2 \\ + \frac{1}{2}a^0(u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + \int_0^T j(u'_\lambda+\Phi')dt \\ - \frac{1}{2}|u_1|^2 - \frac{1}{2}a^0(u_0,u_0)\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}\int_0^T[(u'', v) + a^0(u, v) + j(v+\Phi') - (L, v-u')]dt \\ \geqslant \liminf_\lambda\Big[\frac{1}{2}|u'_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2}a^0(n_\lambda(T), u_\lambda(T)) \\ + \int_0^T j(u'_\lambda+\Phi')dt\Big] - \frac{1}{2}|u_1|^2 - \frac{1}{2}a^0(u_0,u_0)\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|u'(T)|^2 + \frac{1}{2}a^0(u(T),u(T))$$

$$+ \int_0^T j(u' + \Phi')dt - \frac{1}{2}|u_1|^2 - \frac{1}{2}a^0(u_0,u_0)$$

$$= \int_0^T [(u'',u') + a^0(u,u') + j(u' + \Phi')]dt$$

从而

$$\int_0^T [(u'', v - u') + a^0(u, v - u') + j(v + \Phi') - j(u' + \Phi') - (L, v - u')]dt \geqslant 0 \tag{6.143}$$

这对应于不等方程(5.123)的积分形式——它等价于逐点形式. □

6.9 粘性问题解释为抛物型组[1)]

我们要考虑 6.3 的情况，为简单计，设$\Gamma_U = \varnothing$. 我们将以(等价的)不等方程的抛物型组代替(6.22).

今设

$$\mathscr{V} = V_0 \times V_0 \subset \mathscr{H} = V_0 \times H \tag{6.144}$$

设$u = \{u_1, u_2\}$, $v = (v_1, v_2)$ 表示 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{H}$ 中的两个元素，令

$$[u, v] = a^0(u_1, v_1) + (u_2, v_2) \tag{6.145}$$

$$\pi(u, v) = -a^0(u_2, v_1) + a^1(u_2, v_2) + a^0(u_1, v_2) \tag{6.146}$$

$\mathscr{H}$ 对内积(6.145)是一 Hilbert 空间；形式 $\pi(u, v)$ 在 $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ 上连续，a^0 是对称的，我们有

$$\pi(v, v) = a^1(v_2, v_2) \geqslant \alpha\|v_2\|^2 \tag{6.147}$$

若令

$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\} \tag{6.148}$$

我们考虑“抛物型不等方程”：

$$[u'(t), v - u'(t)] + \pi(u(t), v - u'(t)) + j(v_2 + \Phi'(t)) - j(u_2(t) + \Phi'(t)) \geqslant (L(t), v_2 - u_2(t)), \forall v \in \mathscr{V} \tag{6.149}$$

---

1) 本段可以跳过.

它等价于(6.72) $(u(t)=u_1(t))$；等价性的验证是直接的；只需利用记号(6.145),(6.146)明确写出(6.149)；即得两个不等方程，其第一个是

$$a^0(u_1'(t),v_1-u_1'(t))-a^0(u_2(t),v-u_1'(t))\geqslant 0,\ \forall v_1\in\mathscr{V}_0$$

它等价于

$$u_1'(t)-u_2(t)=0$$

由此即得结果。 □

注 6.9 因而可见，在抛物型不等方程形式(6.149)之下问题类型在第二章曾遇到过。 □

注 6.10 可从(6.149)出发——自然加上初条件 $u(0)=\{u_0,u_1\}$——重得定理 6.1。 □

7. 线性粘-弹性。长记忆材料

7.1 特性定律和推广

特性定律现由(6.6)给出，重写如下：

$$\sigma_{ij}(t)=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u(t))+\int_0^t b_{ijkh}(t-s)\varepsilon_{kh}(u(s))ds \tag{7.1}$$

其中第一项表示瞬时弹性作用，系数 a_{ijkh}（称为瞬时弹性系数）可能依赖于 x[1]，但关于 x 有界且满足

$$\begin{cases} a_{ijkh}=a_{jikh}=a_{khij} \\ a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ \alpha>0 \end{cases} \tag{7.2}$$

系数 $b_{ijkh}(t)$ 体现材料的记忆作用。

在通常的实际例子中，这些系数是带负系数的指数函数的线性组合：记忆随时间的推移指数地衰减。例如可见 P. Germain[2], W. Prager[1] 和 T. H. Lin[1]。

系数 $b_{ijkh}=b_{ijkh}(x,t)$ 依赖 t，也可能依赖 x，关于 x，t 有界且满足

1) 用下面同样的方法(除 7.5 外)，同样可解决当 a_{ijkh} 正则地依赖于 t 时的问题。

(7.3) $$b_{ijkh} = b_{ijkh}$$

和正则性条件

(7.4) $b_{ijkh}, \partial b_{ijkh}/\partial t, \partial^2 b_{ijkh}/\partial t^2 \in L^\infty(Q)(Q = \Omega \times]0, T[)$

"固体型"粘弹性材料:

(7.1) 型的长记忆粘弹性材料称为固体型的,如果

(7.5) $$\int_0^\infty b_{ijkh}(t)dt = b_{ijkh}^\infty \text{ 有穷}$$

(7.6) $$a_{ijkh}^\infty = a_{ijkh} + b_{ijkh}^\infty \text{ 满足类似于(7.2)的条件}$$

这时 a_{ijkh}^∞ 称为"延迟弹性系数"。

可以证明,在一定的条件下,下面的问题的解 $u(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时趋于对应系数为 a_{ijkh}^∞ 的弹性问题的解。 □

7.2 带摩擦的动态问题

方程是

(7.7) $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ijkh}(t-s)\varepsilon_{kh}(u(s))ds = f$$

边条件和初条件与(6.8)—(6.11)相同.

注 7.1 同样可引入例如 5.4.1 那样的其它边条件。 □

为给出变分提法,令

(7.8) $$a(u, v) = \int_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

(7.9) $$b(t; u, v) = \int_\Omega b_{ijkh}(t)\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

(7.10) $$\begin{cases} V = (H^1(\Omega))^3, \ H = (L^2(\Omega))^3 \\ V_0 = \{v \mid v \in V, \text{ 在 } \Gamma_U \text{ 上 } v = 0\} \end{cases}$$

形式 $v \to b(t; u, v)$ 在 V_0 上是连续的,于是

(7.11) $b(t; u, v) = (B(t)u, v), B(t)u \in V_0', B(t) \in \mathscr{L}(V_0, V_0')$

引入由(6.13),(6.14)定义 的 $j(v)$ 和 $\mathscr{U}_{ad}$

于是问题以下列方式提出(与 n°5.5.1 和 n°6.2 比较):求 $u(t)$,满足

$$
(7.12)\quad \left|\begin{aligned}
&(u''(t), v-u'(t)) + a(u(t), v-u'(t)) \\
&\qquad + \int_0^t b(t-s; u(s), v-u'(t))ds \\
&\qquad + j(v) - j(u'(t)) \geqslant (f(t), v-u'(t)) \\
&\qquad + \int_{\Gamma_g} F_N(v_N - u'_N(t))d\Gamma, \ \forall v \in \mathscr{U}_{ad}(t)
\end{aligned}\right.
$$

和

$$
(7.13)\qquad u'(t) \in \mathscr{U}_{ad}(t)
$$

$$
(7.14)\qquad u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1
$$

注 7.2 当 $\mathscr{F} = 0$ (无摩擦) 时,(7.12)代以线性方程. 当 $U = 0$ ($\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_U$) 时

$$
(7.15)\qquad \begin{aligned}
&(u''(t), v) + a(u(t), v) \\
&\qquad + \int_0^t b(t-s; u(s), v)ds = (f(t), v) \\
&\qquad + \int_{\Gamma_F} F_N v d\Gamma, \ \forall v \in V_0
\end{aligned}
$$

当 $U \neq 0$ 时,上式中 v 代以 $v-u$. □

注 7.3 对情形"Γ_U 有正测度"和"$\Gamma_U = \varnothing$" 的区别,我们有类似于注 4.4, 5.17 和 6.2 的性质.

7.3 动态情形的存在性和唯一性定理

引进满足(6.18)的 $\Phi(t)$ (当 $\Gamma_U = \varnothing$, $\Phi = 0$); u 代以 $u-\Phi$ (并保留记号 u), 问题化为求 u, 使

$$
(7.16)\qquad u(t) \in V_0
$$

$$
(7.17)\quad \left|\begin{aligned}
&(u''(t), v-u'(t)) + a(u(t), v-u'(t)) \\
&\qquad + \int_0^t b(t-s; u(s), v-u'(t))ds \\
&\qquad + j(v+\Phi'(t)) - j(u'(t)+\Phi'(t)) \\
&\geqslant (L(t), v-u'(t)), \ \forall v \in V_0
\end{aligned}\right.
$$

这里

$$(7.18)\qquad (L(t),v)=(f(t),v)+\int_{\Gamma_g}F_N(t)v_N d\Gamma-(\Phi''(t),v)-a(\Phi(t),\ v)-\int_0^t b(t-s;\Phi(s),v)ds$$

初条件是

$$(7.19)\qquad \begin{cases} u(0)=u_0\ (\text{实为}\ u_0-\Phi(0)) \\ u'(0)=u_1\ (\text{实为}\ u_1-\Phi'(0)) \end{cases}$$

我们有

定理 7.1 假设

(7.20) $f,f',f''\in L^2(0,T;H)$, F_N, F'_N, $F''_N\in L^2(T_g\times]0,T[)$

(7.21) $\Phi,\Phi',\Phi''\in L^2(0,T;V)$, $\Phi''',\Phi^{(4)}\in L^2(0,T;H)$, $\Phi(0)\in(H^2(\Omega))^3$

(7.22) g 不依赖于 t,

(7.23) $u_0\in V_0$, $(L(0),v)-a(u_0,v)=(u_2,v)$, $u_2\in H$

(7.24) $u_1\in V_0$, 在 Γ_g 上 $u_{1T}+\Phi'_T(0)=0$

在这些条件下,有且仅有一个函数 u 使

$$(7.25)\qquad u,u'\in L^\infty(0,T;V_0)$$

$$(7.26)\qquad u''\in L^\infty(0,T;H)$$

且 u 满足(7.17),(7.19).

唯一性的证明. 利用记号(7.11),我们记

$$\int_0^t b(t-s;\ u(s),v-u'(t))ds$$

为

$$\left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds,\ v-u'(t)\right)$$

设 u 和 u_* 是两个可能的解. 在不等方程(7.17)(相应地,在关于 u_* 的不等方程)中取 $v=u'_*(t)$(相应地, $v=u'(t)$)并相加,令 $w=u-u_*$, 即得

$$-(w''(t),w'(t))-a(w(t),w'(t))$$

$$-\left(\int_0^t B(t-s)w(s)ds,\ w'(t)\right)\geqslant 0$$

由此[1]

$$\frac{d}{dt}[|w'(t)|^2+a(w(t))]$$
$$\leqslant -2\left(\int_0^t B(t-s)w(s)ds,\ w'(t)\right)$$

于是

$$|w'(t)|^2+a(w(t)) \leqslant -2\int_0^t ds\left(\int_0^s B(s-s_1)w(s_1)ds_1,\ w'(s)\right) \tag{7.27}$$

而一般有(对 $t\leqslant T\leqslant\infty$):

$$\left|\int_0^t ds\left(\int_0^s B(s-s_1)\varphi(s_1)ds_1,\ \varphi'(s)\right)\right| \leqslant c\left[\int_0^t \|\varphi(s)\|^2ds + \|\varphi(t)\|\int_0^t \|\varphi(s)\|ds\right] \tag{7.28}$$

事实上

$$\int_0^t ds\left(\int_0^s B(s-s_1)\varphi(s_1)ds_1,\ \varphi'(s)\right)$$
$$=\int_0^t ds_1\int_{s_1}^t (B(s-s_1)\varphi(s_1),\ \varphi'(s))ds$$
$$=\int_0^t ds_1[(B(t-s_1)\varphi(s_1),\ \varphi(t)) - (B(0)\varphi(s_1),\ \varphi(s_1))]$$
$$-\int_0^t ds_1\int_{s_1}^t (B'(s-s_1)\varphi(s_1),\ \varphi(s))ds$$

由此即得(7.28)。

(7.27)和(7.28)给出

$$|w'(t)|^2+a(w(t))\leqslant c\int_0^t\|w(s)\|^2ds+c\|w(t)\| \tag{7.29}$$

---

1) 回忆 $|f|=(f,f)^{1/2}$, $a(v)=a(v,v)$.

$$\times \int_0^t \|w(s)\| ds$$

而对 $\lambda > 0$ 存在 $\alpha > 0$ 使

(7.30) $$a(v) + \lambda |v|^2 \geqslant \alpha \|v\|^2$$

(当 Γ_0 测度为正时可取 $\lambda = 0$)，于是(7.29)给出[1]

(7.31) $$|w'(t)|^2 + \alpha \|w(t)\|^2 \leqslant \lambda |w(t)|^2 + c \int_0^t \|w(s)\|^2 ds + \frac{\alpha}{2} \|w(t)\|^2$$

而

$$w(t) = \int_0^t w'(s) ds$$

于是由(7.31)推出

(7.32) $$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant c \int_0^t (|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2) ds$$

由此 $w = 0$[2]. □

存在性的证明. 仿定理 6.1 的证明，我们用 5.5.4 的方法.

正则化近似方程是

(7.33) $$(u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + \left(\int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, v \right) + (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v) = (L(t), v), \forall v \in V_0$$

初条件是

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \ u_\varepsilon'(0) = u_1$$

在(7.33)中令 $v = u_\varepsilon' + \Phi'$，则得第一批估计.

唯一要验证的是

$$X = \left(\int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, u_\varepsilon'(t) + \Phi'(t) \right)$$

可适当地估计. 对于

---

1) c 表示不同常数.

2) 这里没有利用所有假设(7.4)，仅用了 $\frac{\partial}{\partial t} b_{ijkh}(x, t)$ 在 $L^\infty(\Omega \times]0, T[)$ 中这一事实.

$$\left(\int_0^t B(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ \Phi'(t)\right)$$

显然，剩下的是

$$X_1 = \left(\int_0^t B(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ u_\varepsilon'(t)\right)$$

而根据(7.28)

$$(7.34)\qquad \left|\int_0^t X_1(s)ds\right| \leqslant c\left(\int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 ds + \|u_\varepsilon(t)\|\int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|ds\right)$$

因而(仿 5.5.4)即得

$$(7.35)\qquad \|u_\varepsilon(t)\| + |u_\varepsilon'(t)| \leqslant c$$

若在(7.33)中令"$t=0$"，由(7.24)得

$$(u_\varepsilon''(0),\ v) + a(u_0,\ v) = (L(0),\ v)$$

由(7.23)得

$$(7.36)\qquad u_\varepsilon''(0) = u_2$$

(7.33)对 t 求导，即有

$$(7.37)\qquad (u_\varepsilon''',\ v) + a(u_\varepsilon',\ v) + (B(0)u_\varepsilon(t),\ v) + \left(\int_0^t B'(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ v\right) + ((j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'))',\ v) = (L'(t),\ v)$$

我们将有与前面相同的估计，只要适当地控制下列各项：

a) $(B(0)u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t))$——这项的控制易得；

b) $Y = \left(\int_0^t B'(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)\right)$

$$\left(\int_0^t B'(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ \Phi''(t)\right)$$

仍可直接控制，剩下要控制

$$Y_1 = \left(\int_0^t B'(t-s)u_\varepsilon(s)ds,\ u_\varepsilon''(t)\right)$$

而

$$\int_0^t Y_1(s)ds = \int_0^t ds\left(\int_0^s B'(s-s_1)u_\varepsilon(s_1)ds_1,\ u_\varepsilon''(s)\right)$$

$$= \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B'(s - s_1)u_0(s_1), u_t''(s))ds$$

$$= \int_0^t [(B'(t - s_1)u_0(s_1), u_t'(t))$$

$$- (B'(0)u_0(s_1), u_t'(s_1))]ds_1$$

$$- \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B''(s - s_1)u_0(s_1), u_t'(s))ds$$

现利用(7.4)即得

$$\left|\int_0^t Y_1(s)ds\right| \leqslant c\|u_t'(t)\|^2 + c$$

$$+ c\int_0^t \|u_t'(s)\|^2 ds$$

控制右端各项没有任何困难。即得

$$\|u_t'(t)\| + |u_t''(t)| \leqslant C \tag{7.38}$$

仿定理 6.1 即可完成定理的证明。

7.4 拟静态情形

用类似于第 6 节的考虑可知，伴随(7.17)，(7.19)的拟静态问题可叙述如下(设 U 不依赖于 t，便可设 Φ 不依赖于 t)：求 $u(t)$，使

$$u(t) \in V_0 \tag{7.16}$$

$$a(u(t), v - u'(t)) + \left(\int_0^t B(t - s)u(s)ds, v - u'(t)\right) + j(v) - j(u') \geqslant (L(t), v - u'(t)), \quad \forall v \in V_0 \tag{7.39}$$

$$u(0) = u_0 \tag{7.40}$$

7.4.1 关于初值的必要条件

设问题(7.39)，(7.40)有一对 t 正则的解；令 $u'(0) = u_1$ (u_1 不预先给定)。在(7.39)中令 $t = 0$ 即得

$$a(u_0, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geqslant (L(0), v - u_1)$$

即

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V_0} [a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = a(u_0, u_1) - (L(0), u_1) + j(u_1) > -\infty \tag{7.41}$$

为简单计，若设

$$U = 0 \tag{7.42}$$

我们可以把(7.41)精确化。

这时利用 Green 公式，有

$$a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v) = (Au_0 - f(0), v) + \int_{\Gamma_g} (\sigma_N^0 v_N - F_N(0) v_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_g} (\sigma_T^0 v_T + g|v_T|) d\Gamma$$

于是 $\operatorname{Inf}[a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = -\infty$，除非

$$\begin{cases} Au_0 = f(0) \\ \sigma_N^0 = F_N(0), \text{ 在 } \Gamma_g \text{ 上} \\ |\sigma_T^0| \leqslant g, \text{在 } \Gamma_g \text{ 上}(u_0 = 0, \text{在 } \Gamma_U \text{ 上}) \end{cases} \tag{7.43}$$

在条件(7.43)之下则有

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V_0} [a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = 0 \tag{7.44}$$

必要条件(7.43)对于(7.39)，(7.40)的"强"解的存在性也是充分的；见 H. Brézis[2] 第 2 章（那里用了与非线性半群相联系的方法）。从力学观点看，初条件似乎是 $u_0 = u_0^*$，u_0^* 是下列问题的解：

$$\begin{cases} \text{在 } \Omega \text{ 内 } Au_0^* = f(0) \\ \text{在 } \Gamma_g \text{ 上 } \sigma_N(u_0^*) = F_N(0) \ (\text{在 } \Gamma_U \text{ 上 } u_0^* = 0) \\ |\sigma_T(u_0^*)| < g \Longrightarrow u_{0T}^* = 0 \\ |\sigma_T(u_0^*)| = g \Longrightarrow \exists \lambda \geqslant 0 \text{ 使 } u_{0T}^* = -\lambda \sigma_T(u_0^*) \end{cases}$$

即 u_0^* 是对应于力 $f(0)$，$F_N(0)$ 和 Γ_g 上的摩擦条件的静态弹性问题的解。

然而为更简单些，我们可在更强的假设之下证明存在性，即设

$$\begin{cases} Au_0 = f(0), \ \Omega \text{ 内} \\ \sigma_N^0 = F_N(0), \ \Gamma_g \text{ 上} \\ \sigma_T^0 = 0, \ \Gamma_g \text{ 上(在 } \Gamma_U \text{ 上 } u_0 = 0) \end{cases} \tag{7.45}$$

7.4.2 情形"$\operatorname{Mes} \Gamma_U > 0$"的研究

定理 7.2 假定 Mes $\Gamma_U > 0$，u_0 在 $(H^2(\Omega))^3$ 中给定且满足 (7.45)．假定 $U = 0$ 从而 $\Phi = 0$，又 (7.20)，(7.22) 成立。

在这些条件之下，有且仅有一个函数 u，满足

(7.46) $$u, u' \in L^\infty(0, T; V_0)$$

和 (7.39)，(7.40)。

唯一性的证明．设 u 和 u_* 是两个可能的解，$w = u - u_*$．在 (7.39) 中令 $v = u'_*(t)$（相应地，在关于 u_* 的不等方程中令 $v = u'(t)$）并相加，再积分即得（比较 (7.29)）

(7.47) $$a(w(t)) \leqslant c\int_0^t \|w(s)\|^2 ds + c\|w(t)\|\int_0^t \|w(s)\| ds$$

而由于 Γ_U 测度为正，则当 $\lambda = 0$ 时 (7.30) 成立，于是由 (7.47) 推出

$$\|w(t)\|^2 \leqslant c\int_0^t \|w(s)\|^2 ds$$

即得 $w = 0$。 ▯

存在性的证明．我们实行双重正则化．把 j 正则化为 j_ε 并加一项 $\eta(u'', v)$，$\eta > 0$．以下列重双正则化方程近似 (7.39)：

(7.48) $$\eta(u''_{\varepsilon\eta}, v) + a(u_{\varepsilon\eta}, v) + \left(\int_0^t B(t-s)u_{\varepsilon\eta}(s)ds, v\right) + (j'_\varepsilon(u'_{\varepsilon\eta}(t)), v) = (L(t), v)$$

带初条件

(7.49) $$u_{\varepsilon\eta}(0) = u_0$$

(7.50) $$u'_{\varepsilon\eta}(0) = 0^{1)}$$

令 $v = u'_{\varepsilon\eta}(t)$，即得第一组先验估计，

(7.51) $\|u_{\varepsilon\eta}\| \leqslant c$（诸 c 表不依赖于 ε 和 η 的常数）

(7.52) $$\sqrt{\eta}\,|u'_{\varepsilon\eta}| \leqslant c$$

为进一步推演，求 (7.48) 对 t 的导数，再以 $u''_{\varepsilon\eta}(t)$ 代 v．还必须有一 $u''_{\varepsilon\eta}(0)$ 的不依赖于 ε 和 η 的估计．

---

1) 根据 (7.44) 和 (7.41) 这是自然的，在 $u_1 = 0$ 取最小值．

在(7.48)中令 $t=0$ 即有

(7.53) $$\eta(u''_{\varepsilon\eta}(0), v) + a(u_0, v) + (j'_\varepsilon(0), v) = (L(0), v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_g} F_N(0) v_N d\Gamma$$

而按照(7.45)，$a(u_0, v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_g} F_N(0) v_N d\Gamma$，于是(7.53)给出

$$\eta(u''_{\varepsilon\eta}(0), v) = 0$$

于是[1]

(7.54) $$u''_{\varepsilon\eta}(0) = 0$$

从而

(7.55) $$\|u'_{\varepsilon\eta}(t)\| \leqslant c$$

(7.56) $$\sqrt{\eta}\,|u''_{\varepsilon\eta}(t)| \leqslant c$$

用通常的手续可对 ε 和 η 取极限。□

注 7.4 在"无摩擦"时，Γ_g 代以 Γ_F (见6.7)。问题是求函数 u，满足(7.16)和

(7.57) $$a(u(t), v) + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v\right) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_i(t) v_i d\Gamma$$

则 u_0 是给定的：在(7.57)中取 $t=0$ 即有

(7.58) $$a(u_0, v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_F} F_i(0) v_i d\Gamma$$

这是在此时(7.45)的类似。□

7.4.3 情形"$\Gamma_U = \varnothing$"的研究

如 $\Gamma_U = \varnothing$，问题是求 u，满足

(7.59) $$\begin{cases} u(t) \in V \\ a(u(t), v-u'(t)) + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v-u'(t)\right) \\ \qquad + j(v) - j(u'(t)) \geqslant (L(t), v-u'(t)),\ \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

1) 正是为了得到这个不依赖于 η 的估计，我们作假设(7.45)。

完全按 6.6 可得必要条件：在(7.59)中取 $v = u'(t) + \rho$, $\rho \in \mathscr{R}$，由于

$$\left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds,\ \rho\right) = \int_0^t b(t-s;\ u(s),\ \rho)ds = 0$$

即得

$$j(u'(t)+\rho) - j(u'(t)) \geqslant (L(t),\ \rho)$$

由此

$$j(\rho) \geqslant (L(t),\ \rho)$$

或

$$|(L(t),\rho)| \leqslant j(\rho),\ \forall \rho \in \mathscr{R} \tag{7.60}$$

下面会看到必要条件 (7.60) 对于在适当的意义下有解也是充分的。过渡到关于 $\mathscr{R}$ 的商(见(6.67))；令

$$a(u^\cdot,\ v^\cdot) = a(u,\ v)$$

$$b(t;\ u^\cdot,\ v^\cdot) = b(t;\ u,\ v),\ u \in u^\cdot,\ v \in v^\cdot \tag{7.61}$$

定义(比较(6.70))

$$\mathscr{H}(t;\ v^\cdot) = \operatorname*{Inf}_{\rho \in \mathscr{R}} [j(v+\rho) - (L(t), v+\rho)] \tag{7.62}$$

由于(7.60)，有(见(6.71)) $\mathscr{H}(t;v^\cdot) > -\infty$。

要考虑的问题则是求 $u^\cdot(t)$，使

$$u^\cdot(t) \in V^\cdot \tag{7.63}$$

$$a(u^\cdot(t), v^\cdot - u^\cdot(t)) + \int_0^t b(t-s;\ u^\cdot(s),\ v^\cdot - u^\cdot(t))ds + \mathscr{H}(t;v^\cdot) - \mathscr{H}(t;u^\cdot(t)) \geqslant 0,\quad \forall v^\cdot \in V^\cdot \tag{7.64}$$

$$u^\cdot(0) = u_0^\cdot \tag{7.65}$$

我们有

定理 7.3 设(7.60)成立，(7.20)和(7.22)亦成立。假定

$$a(u_0^\cdot,\ v^\cdot) + \mathscr{H}(0;\ v^\cdot) = 0 \tag{7.66}$$

则有且仅有一个函数 $u^\cdot$

$$u^\cdot,\ u^{\cdot\prime} \in L^\infty(0,\ T;\ V^\cdot) \tag{7.67}$$

$u^{\cdot}$ 满足(7.63),(7.64),(7.65)。

证明可利用与定理 7.2 和定理 6.3 同样方法。 ▯

注 7.5 在无摩擦时,(7.60)给出

$$(7.68)\qquad (L(t),\rho)=0,\ \forall\rho\in\mathscr{R}$$

于是 $\mathscr{L}(t;v^{\cdot})=(L(t),v^{\cdot})$，因而(7.64)简化为

$$(7.69)\qquad a(u^{\cdot}(t),v^{\cdot})+\int_0^t b(t-s;u^{\cdot}(s),v^{\cdot})ds=(L(t),v^{\cdot}),\ \forall v^{\cdot}\in V^{\cdot}$$

7.5 在无摩擦情形 Laplace 变换的运用

引入算子 $A\in\mathscr{L}(V_0;V_0')$，其定义为

$$(7.70)\qquad a(u,v)=(Au,v),u,\ v\in V_0.$$

则动态问题可表为(见注 7.2)

$$(7.71)\qquad u''+Au+B*u=L$$

其中[1)]

$$(7.72)\qquad B*u(t)=\int_0^t B(t-s)u(s)ds$$

(7.71)中在]0,∞[上对 t 求导；以下对 $t<0$ 把 u 延拓为 0 是适宜的——仍以 u 记这个延拓;那么这时在]−∞,+∞[上求导,则有

$$(7.73)\qquad \begin{cases} u''+Au+B*u=L+u_0\delta'+u_1\delta, \\ \qquad \mathscr{D}'(V_0')\ \text{中的方程} \\ \text{当}\ u<0\ \text{时}\ u\ \text{为零。} \end{cases}$$ ▯

拟稳态问题表达为

$$(7.74)\qquad Au+B*u=L$$ ▯

为简单计,设 L 不依赖于 t 。

问题(7.73)(对应地,(7.74))的解可由对 t 的 Laplace 变换得到(这是 Lions[3] 的一特殊情形)。

引入

$$(7.75)\qquad \hat{u}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}u(t)dt,\ p=\xi+i\eta,\ \xi>0$$

---

1) 关于 t 的向量值函数的卷积。

(u 的(关于 t) 的 Laplace 变换)。

假定

(7.76) $$b_{ijkh} \in L^1(0,\infty; L^\infty(\Omega))$$

由此推出

(7.77) $$B \in L^1(0, \infty; \mathscr{L}(V_0, V_0'))$$

引入[1]

(7.78) $$\hat{B}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}B(t)dt \quad (\in \mathscr{L}(V_0; V_0')), \ \xi \geqslant \xi_*$$

由 Laplace 变换,(7.73)(相应地,(7.74))等价于

(7.79) $$(p^2 + A + \hat{B}(p))\hat{u}(p) = \frac{1}{p} L + pu_0 + u_1$$

(相应地

(7.80) $$(A + \hat{B}(p))\hat{u}(p) = \frac{1}{p} L)$$

已经证明(见 Lions[3])问题(7.79)有唯一解,只要 ξ 充分大。设 $\xi \geqslant \xi_0$,于是

(7.81) $$\hat{u}(p) = (p^2 + A + \hat{B}(p))^{-1}\left(\frac{1}{p} L + pu_0 + u_1\right)$$

而函数

$$p \to (p^2 + A + \hat{B}(p))^{-1}\left(\frac{1}{p} L + pu_0 + u_1\right)$$

有逆 Laplace 变换,它就是问题的解 u。 □

对于拟静态情形,已证明了一个类似结果,当 $\xi \geqslant \xi_1$ 时,可求 $A + \hat{B}(p)$ 的逆且

(7.82) $$\hat{u}(p) = (A + \hat{B}(p))^{-1}\frac{1}{p} L;$$

函数 $p \to (A+\hat{B}(p))^{-1}\dfrac{1}{p} L$ 有一个逆 Laplace 变换,此即问题的解 u。 □

---

1) 假定 $e^{-\xi t}B \in L^1(0, \infty; \mathscr{L}(V_0; V_0'))$ (当 $\xi \geqslant \xi_*$)。此外有时可取消这个假设.见 Lions[3].

7.6 作为带记忆情形极限的弹性情形

我们考虑定律(比较 6.8)

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u(t)) + \lambda\int_0^t b_{ijkh}(t-s)\varepsilon_{kh}(u(s))ds \tag{7.83}$$

$\lambda > 0$ 预定要趋于零

用 u_λ 表示定理 7.1 中对应问题的解,即

$$u_\lambda(t) \in V_0 \tag{7.84}$$

$$\begin{aligned}(u_\lambda''(t), v - u_\lambda'(t)) + a(u_\lambda(t), v - u_\lambda'(t)) \\ + \lambda\int_0^t b(t-s; u_\lambda(s), v - u_\lambda'(t))ds \\ + j(v + \Phi'(t)) - j(u_\lambda'(t) + \Phi'(t)) \\ \geqslant (L(t), v - u_\lambda'(t)),\ \forall v \in V_0\end{aligned} \tag{7.85}$$

$$u_\lambda(0) = u_0,\ u_\lambda'(0) = u_1 \tag{7.86}$$

我们有

定理 7.3 设定理7.1的条件成立,则当 $\lambda \to 0$ 时有

$$u_\lambda \to u,\ u_\lambda' \to u',\ \text{在 } L^\infty(0, T; V_0)\ \text{弱}^* \tag{7.87}$$

$$u_\lambda'' \to u'',\ \text{在} L^\infty(0, T; H)\ \text{中弱}^* \tag{7.88}$$

其中 u 是定理 5.7 给定的"弹性"情形的解.

为证此定理,考虑正则化问题的解 $u_{\varepsilon\lambda}$ (比较(7.33)):

$$\begin{aligned}(u_{\varepsilon\lambda}'', v) + a(u_{\varepsilon\lambda}, v) \\ + \lambda\left(\int_0^t B(t-s)u_{\varepsilon\lambda}(s)ds,\ v\right) \\ + (j_\varepsilon'(u_{\varepsilon\lambda}' + \Phi'), v) = (L(t), v),\ \forall v \in V_0 \\ u_{\varepsilon\lambda}(0) = u_0,\ u_{\varepsilon\lambda}'(0) = u_1\end{aligned} \tag{7.89}$$

如定理 7.1 的证明一样,得到不依赖于 ε 和 λ 的估计:

$$\|u_{\varepsilon\lambda}(t)\| + \|u_{\varepsilon\lambda}'(t)\| + |u_{\varepsilon\lambda}'(t)| \leqslant c$$

由此推出定理. □

注 7.7 更一般地,定理 7.1 给的解 $u = u_{(b)}$"连续依赖于 b". □

8. 评　述

我们在第 2,3,4 各节复习了线性弹性古典理论的要点，这对 5,6,7 诸节的主要内容是有用的。特别在第 3 节给出了 Korn 不等式的一个证明，该不等式无论在古典理论或在“带摩擦”或“单侧”情形都起着重要的作用。这个不等式在关于 Ω 的边界需要较少假设下的证明属于 J. Gobert [1]. 我们的证明基于一个一般定理（定理 3.2），它十分简单，此外还可推广为：若 $v \in H^{-m}(\Omega)$，$D^p v \in H^{-m}(\Omega)$，$\forall |p| = k$，则 $v \in H^{-m+k}(\Omega)$. 在边界带摩擦条件下的弹性问题由作者们在 Duvaut-Lions [6] 中引进. 第一个弹性单侧问题是 Signorim 问题. 这先由 G. Fichera[1]，后由 Lions-Stampacchia[1] 所研究。

Signorini 问题在带长记忆的线性粘弹性中的类似曾在 G. Duvaut[4] 中研究. 至于有关线性粘弹性古典问题的结果可参考 L. Brun[1]，C. M. Dafermos[1]，J. N. Distefano[1] 和 G. Duvaut [3]及其著作中的文献.

在 3.5 只给出了有关对偶理论的初步概念. 对于一般理论参考 Moreau[1]，Rockafellar [1]，Temam[2]. 对偶问题的例子曾在M. J. Sewell[1] 和 K. Wasmizu[1] 中研究.

第四章　平板理论中的单侧现象

1. 引　　言

本章我们要研究有关弹性平板的单侧和摩擦现象.

板的理论是二维的;实际上，这是一个近似理论,板是一个三维物体,其一维(厚度)比之其它二维是小的.

我们简短地叙述这一理论(显然无须详尽无遗地研究,这不是我们的目的),以便引入单侧问题而不发生任何歧义

在逼近时,我们限于一阶项,因而它是“线性理论”(虽然,已经多次指出,单侧问题是非线性的;但所考虑的微分算子是线性的).非线性理论(更正确地说,各种非线性理论，因为在文献中存在多种类型的非线性模型)——例如关于 Von Karman 方程——导出的单侧条件与在线性情形是同类型的;为叙述简单,这里不研究该理论，只建议参考作者们的一篇文章.

2. 板的一般理论

2.1 定义和记号

在非变形状态，所考虑的平板作为二维介质占据一区域 Ω，这里

Ω — 带正则边界的 R^2 中的有界开集.

又设

$n(\tau)$ 是 Γ 的单位外法向量 (由 n 旋转 $+\pi/2$ 得单位切向量).

平面 R^2 上安放了正交规范轴 Ox_1, Ox_2. 加上轴 Ox_3 即构成正交规范系 $Ox_1x_2x_3$.

事实上，板是一个三维物体，它占据 $\mathbf{R}^3$ 的一体积 $\mathscr{V}$，定义为

$$(2.1)\quad \mathscr{V}=\left\{x \mid x=\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbf{R}^3,\ x_1, x_2 \in \Omega \text{ 且} -\frac{1}{2} h(x_1, x_2) < x_3 < \frac{1}{2} h(x_1, x_2)\right\}$$

其中函数 $\{x_1, x_2\} \rightarrow h(x_1, x_2)$ 表示板的厚度，$h(x_1, x_2)$ 是"小的"。

设

$$u(x_1, x_2, x_3, t)=\{u_i(x_1, x_2, x_3, t) \mid i=1, 2, 3\}$$

是在时刻 t 板的位移向量，下面要确定表征 Ω 内的 $u(x_1, x_2, 0, t)$ 的方程(及不等方程)。 □

记号约定　指标 $i, j, \cdots$ 从 1 变到 3。指标 $\alpha, \beta, \cdots$ 从 1 变到 2。

于是位移向量有分量 u_i，Ω 的点有坐标 x_α。

2.2　力的分析

事实上，确切地说，给定的是 $\mathscr{V}$ 上的力的体密度 $\bar{f}=\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$，我们不考虑它们的精确分布，只考虑在 Ω 的单位面积上的简缩元，令

$$f_i(x_1, x_2)=\int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_i(x_1, x_2, x_3) d x_3$$

$$m_i(x_1, x_2)=\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 \bar{f}_k(x_1, x_2, x_3) d x_3$$

于是在 Ω 的一面积元 dx_1dx_2 上作用着一力元和一矩元，分别定义为

$$(2.2)\quad \begin{cases} f_i(x_1, x_2) d x_1 d x_2 \\ m_i(x_1, x_2) d x_1 d x_2 \end{cases}$$

注意 $m_3=0$。

设 Ω_1 是 Ω 的由封闭曲线 Γ_1 所围的一部分，$\mathscr{V}_1$ 是对应于 Ω_1 的体积，即

$$(2.3)\quad \mathscr{V}_1=\{x \mid x=\{x_1, x_2, x_3\},\ \{x_1, x_2\} \in \Omega_1,\ -h/2$$

$< x_3 < h/2\}$

$\mathscr{V}-\mathscr{V}_1$ 产生作用于 $\mathscr{V}_1$ 上的一力系，在平衡状态，它与力密度 f 一起在 Γ_1 上形成一等价于零的转矩；于是要研究由 $\mathscr{V}-\mathscr{V}_1$ 作用在 $\mathscr{V}_1$ 上的力.

这些作用的施加通过界面

$$S_1 = \Gamma_1 \times]-h/2, h/2[$$

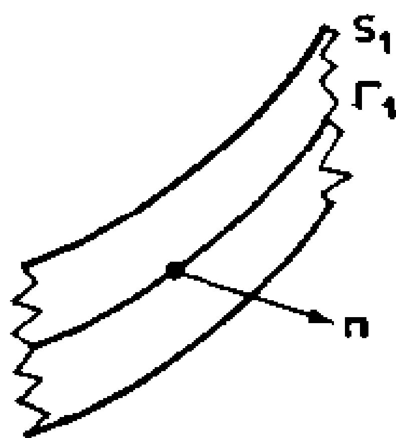


图 16

设 σ_{ij} 是 $\mathscr{V}$ 中的应力张量. 那末 $\mathscr{V}-\mathscr{V}_1$ 在 S_1 上对 $\mathscr{V}_1$ 施加一力密度 $(\sigma_{ij}n_j)$. 于是 Γ_1 的单位长度上的这些力的简缩元给定如下

$$(2.4)\qquad R_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} n_j dx_3, \qquad M_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 \sigma_{kl} n_l dx_3$$

$$(R_i) = \text{合力}, \qquad (M_i) = \text{合力矩}$$

这样，就可在 Γ_1 的所有点，从而在 Ω 的所有点引入一应力张量 (Σ_{ij}) 和一应力偶张量 (M_{ij})，定义为

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Sigma_{ij}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \; h = h(x_1, x_2) \\ M_{ij}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 \sigma_{kj} dx_3 \end{cases}$$

由 $\mathscr{V}-\mathscr{V}_1$ 施加在 $\mathscr{V}_1$ 上的作用则简化为 Γ_1 上的一力密度 (R_i) 和一矩密度 (M_i)，给定为

$$(2.6)\qquad \begin{cases} R_i = \Sigma_{ij} n_j = \Sigma_{i\alpha} n_\alpha \;(\text{因为 } n_3 = 0) \\ M_i = M_{ij} n_j = M_{i\alpha} n_\alpha \end{cases}$$

于是要考虑的应力张量和应力偶张量是 $\Sigma_{i\alpha}$，$M_{i\alpha}$。

可以验证

$$\Sigma_{\alpha\beta}=\Sigma_{\beta\alpha},\quad M_{3\alpha}=0,\quad M_{\beta\beta}=0 \tag{2.7}$$

现在写出板 Ω 的部分 Ω_1 在 $f(\Omega_1$ 上)和由 $\mathscr{Y}-\mathscr{Y}_1$ 所施加的作用力的平衡方程。合力和合力矩是零，即

$$\int_{\Omega_1} f_i dx_1dx_2+\int_{\Gamma_1}\Sigma_{i\alpha}n_\alpha d\Gamma_1=0 \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\varepsilon_{ijk}x_jf_kdx_1dx_2+\int_{\Gamma_1}\varepsilon_{ijk}x_j\Sigma_{k\alpha}n_\alpha d\Gamma_1\\+\int_{\Omega_1}m_idx_1dx_2+\int_{\Gamma_1}M_{i\alpha}n_\alpha d\Gamma_1=0\end{aligned} \tag{2.9}$$

可设 Γ_1 正则，(2.8)和(2.9)分别等价于

$$\int_{\Omega_1}(f_i+\Sigma_{i\alpha,\alpha})dx_1dx_2=0 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}[\varepsilon_{ijk}x_jf_k+(\varepsilon_{ijk}x_j\Sigma_{k\alpha})_{,\alpha}]dx_1dx_2\\+\int_{\Omega_1}(m_i+M_{i\alpha,\alpha})dx_1dx_2=0\end{aligned} \tag{2.11}$$

区域 Ω_1 任意，(2.10)等价于

$$f_i+\Sigma_{i\alpha,\alpha}=0 \tag{2.12}$$

考虑到(2.12)，(2.11)简化为

$$\int_{\Omega_1}(\varepsilon_{i\alpha k}\Sigma_{k\alpha}+M_{i\alpha,\alpha}+m_i)dx_1dx_2=0$$

由此

$$\varepsilon_{i\alpha k}\Sigma_{k\alpha}+M_{i\alpha,\alpha}+m_i=0 \tag{2.13}$$

当 $i=3$ 时，(2.13)的两端是零，而当 $i=1,2$ 时有

$$\left|\begin{aligned}&\Sigma_{32}+M_{1\alpha,\alpha}+m_1=0\\&\Sigma_{31}-M_{2\alpha,\alpha}-m_2=0\end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

在(2.12)和(2.14)中消去 Σ_{31} 和 Σ_{32} 即得

$$\Sigma_{\alpha\beta,\beta}+f_\alpha=0 \tag{2.15}$$

$$M_{2\alpha,\alpha1}-M_{1\alpha,\alpha2}-m_{1,2}-m_{2,1}+f_3=0 \tag{2.16}$$

其中只涉及 $\Sigma_{\alpha\beta}$ 和 $M_{\alpha\beta}$，后面要用到的正是此方程组。

注 2.1 至此我们尚未利用板的厚度 h 是"小的"这一事实作任何简化. □

2.3 线性化理论

2.3.1 假设

今后我们假设 H_i:

H_1) 构成板的三维材料各向同性且服从 Hooke 特性定律,即(见第三章 2.1)

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right] \tag{2.17}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}], \tag{2.18}$$

其中 ν 和 E 分别是 Poisson 系数 $(0 < \nu < 1/2)$ 和 Young 模量 $(E > 0)$.

H_2) 作用在板上的力正交于板,即[1]

$$f_1 = f_2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 0 \tag{2.19}$$

H_3) 板的厚度 h 是"小的".

H_4) 作用力 $(0, 0, f_3)$ 充分小,以致使产生的位移满足

$$u_1(x_1, x_2, 0) = u_2(x_1, x_2, 0) = 0 \tag{2.20}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= x_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + O(h^2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= x_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + O(h^2) \end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

(这里 $O(h^2)$ 表示: $|O(h^2)| \leqslant Mh^2$, $h \to 0$).

H_5) 法向位移 u_3 可如下展开:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, 0) + x_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \tag{2.22}$$

---

1) 至少当 $h = C$ 时总作假设(2.19).

$$+\frac{x_3^2}{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, 0)+O(h^3)$$

由这些假设，我们可求出在 $\mathscr{V}$ 中应变和应力张量的形式。

在 $\mathscr{V}$ 的上、下表面 $(x_3=\pm h/2)$ 的点没有外力作用，因此

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h/2)=\sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h/2)=\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h/2)=0 \tag{2.23}$$

利用 Hooke 定律(2.17)，推出，对 $x_3=\pm h/2$，

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}=0 \tag{2.24}$$

注意到(2.21)，(2.22)，则得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0)=O(h)\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0)=O(h)\end{cases} \tag{2.25}$$

令

$$u_3(x_1, x_2, 0)=\zeta(x_1, x_2),\text{[1]} \tag{2.26}$$

利用(2.21)推出

$$\begin{cases}u_1(x_1, x_2, x_3)=-x_3\partial\zeta/\partial x_1+O(h^2)\\ u_2(x_1, x_2, x_3)=-x_3\partial\zeta/\partial x_2+O(h^2)\end{cases} \tag{2.27}$$

此外(2.24)的第三个关系指出

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1, x_2, \pm\frac{h}{2}\right)=-\frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(x_1, x_2, \pm\frac{h}{2}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\left(x_1, x_2, \pm\frac{h}{2}\right)\right]$$

---

1) ζ 是垂直挠度.

注意到(2.27)，这蕴涵左端有 h 的阶，于是

(2.28) $$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = 0$$

(2.22)对 x_3 求导数，即得

(2.29) $$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\nu x_3}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right] + O(h^2)$$

由此推出

(2.30) $$\varepsilon_{kk}(x_1, x_2, x_3) = -x_3\frac{1-2\nu}{1-\nu} \times \left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right] + O(h^2)$$

由这些关系就可计算在 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的应变张量，

(2.31) $$\begin{cases} \varepsilon_{11} = -x_3\partial^2\zeta/\partial x_1^2 + O(h^2), \\ \varepsilon_{22} = -x_3\partial^2\zeta/\partial x_2^2 + O(h^2) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\nu x_3}{1-\nu}\Delta\zeta + O(h^2) \\ \varepsilon_{12} = -x_3\partial^2\zeta/\partial x_1\partial x_2 + O(h^2), \\ \varepsilon_{23} = O(h^2), \quad \varepsilon_{13} = O(h^2) \end{cases}$$

而应力张量 (σ_{ij}) 是

(2.32) $$\begin{cases} \sigma_{11} = -x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right) + O(h^2) \\ \sigma_{22} = -x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right) + O(h^2) \\ \sigma_{12} = -\frac{E}{1+\nu}x_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2} + O(h^2) \\ \sigma_{13} = O(h^2), \quad \sigma_{23} = O(h^2), \quad \sigma_{33} = O(h^2) \end{cases}$$

下面介绍建立方程的两种方法。

2.3.2 方程的建立．第一种方法

从(2.32)出发来计算 2.2 引进的 $\Sigma_{i\alpha}$ 和 $M_{\alpha\beta}$，直接得到

(2.33) $$\Sigma_{i\alpha} = O(h^5)(i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2)$$

$$
(2.34)\quad \left|\begin{aligned}
&M_{11} = -M_{22} = \frac{E}{1+\nu}\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2} + O(h^4)\\
&M_{12} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right) + O(h^4)\\
&M_{21} = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right) + O(h^4)
\end{aligned}\right.
$$

我们看到，不可能在(2.14)中忽略矩的项前面的 Σ_{13} 和 Σ_{23}，因为所有这些项有同一阶 h^3. 于是应当由第三个方程(2.15)消去 Σ_{13} 和 Σ_{23}，此即给出(2.16)，这里改写为

$$
(2.35)\quad \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta\zeta = f_3 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)
$$

常令

$$
(2.36)\quad D = Eh^3/12(1-\nu^2)
$$

系数 D 称为弯曲刚度. □

格林公式(或虚功原理) 垂直挠度 $\zeta(x_1, x_2)$ 是问题的未知函数，它在 Ω 满足双调和方程 (2.35). 为解此方程，显然必须在 Ω 的边界 Γ 上添加一定的条件. 这些条件或给出位移 ζ 本身，或给出力.我们有作用在 Γ 上的矩的线密度在平面 x_1x_2 上的两个分量(这个矩密度在 Ox_3 上的分量恒等于零). 用(2.6)引入的记号，有

$$
(2.37)\quad \left|\begin{aligned}
M_1 = M_{1\alpha}n_\alpha = D\Big\{&(1-\nu)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}n_1\\
&+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right)n_2\Big\}\\
M_2 = M_{2\alpha}n_\alpha = D\Big\{&-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right)n_1\\
&-(1-\nu)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}n_2\Big\}
\end{aligned}\right.
$$

自然可写出这个矩向量密度的法向和切向分量，即

$$
(2.38)\quad M_n = M_1n_1 + M_2n_2,\quad M_\tau = -M_1n_2 + M_2n_1
$$

引进了这些记号，便可写出 Green 公式.

设定义在 Ω 上的一函数 v 充分正则. (2.16) 乘以 v 并在 Ω 上

积分，即得

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha\delta} v\, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f_3 v\, dx_1 dx_2$$

分部积分两次，令 $dx = dx_1 dx_2$，即得

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta}\, dx - \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\delta} n_{\alpha}\, d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} n_{\delta} v\, d\Gamma = \int_{\Omega} f_3 v\, dx \tag{2.39}$$

我们要依次变换 Γ 上的每个积分。利用(2.13)和(2.6)我们有

$$\int_{\Gamma} v \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} n_{\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\alpha 3} \Sigma_{3\alpha} v n_{\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} v \Sigma_{3\alpha} n_{\alpha}\, d\Gamma$$

即

$$\int_{\Gamma} v \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} n_{\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} v R_3\, d\Gamma \tag{2.40}$$

分解向量 $\{M_{\gamma\alpha} n_{\alpha}\}$ 成法向和切向分量，即得

$$\int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} n_{\alpha} v_{,\delta}\, d\Gamma = \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} (M_n n_{\gamma} + M_{\tau} \tau_{\gamma}) v_{,\delta}\, d\Gamma \tag{2.41}$$

注意到

$$\tau_{\delta} = \varepsilon_{\delta 3\gamma} n_{\gamma}, \quad n_{\delta} = -\varepsilon_{\delta 3\gamma} \tau_{\gamma} \tag{2.42}$$

即得，由于 Γ 是一封闭曲线，因而

$$\int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_n n_{\gamma} v_{,\delta}\, d\Gamma = \int_{\Gamma} M_n v_{,\delta} \tau_{\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} v (\partial M_n / \partial \tau)\, d\Gamma \tag{2.43}$$

另一项容易变换为

$$\int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\tau} \tau_{\gamma} v_{,\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} M_{\tau} v_{,\delta} n_{\delta}\, d\Gamma = -\int_{\Gamma} M_{\tau} (\partial v / \partial n)\, d\Gamma \tag{2.44}$$

合并这些项，得

$$(2.45)\quad \int_\Omega e_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx = \int_\Omega f_3 v dx - \int_\Gamma M_\tau (\partial v/\partial n) d\Gamma + \int_\Gamma (R_3 - \partial M_n/\partial \tau) v d\Gamma$$

再进一步明确左端的双线性型

$$(2.46)\quad a(\zeta, v) = \int_\Omega e_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx = \int_\Omega (M_{1\alpha} v_{,\alpha 2} - M_{2\alpha} v_{,\alpha 1}) dx$$

利用 $M_{\gamma\alpha}$ 的表达式(2.34)，即得

$$(2.47)\quad a(\zeta, v) = D \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx$$

可见双线性型 $a(\zeta, v)$ 是对称的。

又令

$$(2.48)\quad (\varphi, \phi) = \int_\Omega \varphi\phi dx, \quad (\varphi, \phi)_\Gamma = \int_\Gamma \varphi\phi d\Gamma$$

Green 公式就表示为

$$(2.49)\quad a(\zeta, v) = (f_3, v) + (R_3 - \partial M_n/\partial \tau, v)_\Gamma - (M_\tau, \partial v/\partial n)_\Gamma$$

其中 M_τ 和 M_n 的表达式通过 ζ 由(2.37)，(2.38)和(2.34)给出。

此公式使我们预见，一些单侧或非单侧"适定"问题涉及到 Γ 上 M_τ, $R_3 - \partial M/\partial \tau$, ζ 和 $\partial\zeta/\partial n$ 之间的关系。以下令

$$F_3 = R_3 - \partial M_n/\partial \tau$$

2.3.3 方程的建立．第二种方法(属 Landau 和 Lifschitz [1])

我们可用近似方式计算三维体$\mathscr{V}$的形变能，用的是应变和应力张量的表达式(2.31)和(2.32)。

在第三章3.2已看到，一个线性弹性问题的解由求运动学上允许位移场的势能的最小值而获得。这势能是一凸泛函，只需求它的稳定点。我们已知道，物体$\mathscr{V}$的应变能是ζ的函数 $E(\zeta)$，即

$$(2.50)\qquad E(\zeta)=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{+h/2}dx_3\int_{\Omega}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dx_1dx_2$$

经计算即为

$$(2.51)\qquad E(\zeta)=\frac{h^3E}{24(1-\nu^2)}\int_{\Omega}\left\{(\Delta\zeta)^2\right.$$

$$\left.+2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right]\right\}dx$$

由于 $E(\zeta)$ 是运动学上允许场的势能的唯一非线性项，我们求它的微分

$$(2.52)\qquad (E'(\zeta),v)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{E(\zeta+\lambda v)-E(\zeta)}{\lambda}$$

$$(v=v(x_1,x_2))$$

易得

$$(2.53)\qquad (E'(\zeta),v)=a(\zeta,v)$$

其中$a(\zeta,v)$由(2.47)定义。我们还看到$E(\zeta)=\frac{1}{2}a(\zeta,\zeta)$。由分部积分，$a(\zeta,v)$为

$$(2.54)\qquad a(\zeta,v)=D\int_{\Omega}\Delta^2\zeta v dx$$

$$-D\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\tau}\right.$$

$$\times\left[n_1n_2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right)\right.$$

$$\left.\left.+(n_1^2-n_2^2)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}\right]\right\}vd\Gamma$$

$$+D\int_{\Gamma}\left\{\Delta\zeta+(1-\nu)\right.$$

$$\times\left(2n_1n_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}-n_2^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right.$$

$$\left.\left.-n_1^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right)\right\}\frac{dv}{\partial n}\,d\Gamma$$

为使势能稳定，必须且只须外力对位移 v 所做的功由 $a(\zeta, v)$ 给定. 这要求功满足

(2.55) $$\int_\Omega f_3 v\,dx+\int_\Gamma \tilde{F}_3 v\,d\Gamma-\int_\Gamma \tilde{M}(\partial v/\partial n)\,d\Gamma$$

且适合关系

(2.56) $$D\Delta^2\zeta=f_3$$

(2.57) $$-D\left\{\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[n_1n_2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(n_1^2-n_2^2)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x^2}\right]\right\}=\tilde{F}_3$$

(2.58) $$D\left\{\Delta\zeta+(1-\nu)\left(2n_1n_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}-n_2^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-n_1^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}\right)\right\}=-\tilde{M}$$

这又给出由第一个方法所得之关系，只要验证了

(2.59) $$\left|\begin{array}{l}\tilde{F}_3=F_3(=R_3-\partial M_n/\partial\tau)\\ \tilde{M}=M_\tau\end{array}\right.$$

利用(2.14)和(2.34)这是容易做到的.

2.3.4 概要

前面叙述的线性理论，当板的点的位移很小时是有效的，而制约应变的方程是(2.56)，它伴以边条件，若边条件加在位移上，则它直接表示为 ζ 的函数；若边条件加在力上，则当涉及的是作用力时，它由(2.57)表示，当涉及的是以 Γ 的切线作轴的矩时，它由(2.58)表示.

应变能给定为 $\frac{1}{2}a(\zeta,\zeta)$，它由(2.46)所定义且以显式(2.47)表示的双线性型出发来计算. 我们还有 Green 公式或虚功原理(2.49). □

动态情形　位移函数为 $\zeta=\zeta(x,t)$. 在(2.56)中应添加惯性力 $-\rho h\partial^2\zeta/\partial t^2$，我们有

(2.60)　$\rho h\partial^2\zeta/\partial t^2+D\Delta^2\zeta=f_3$($\rho=$ 非形变状态下的面密度)

显然应有初条件

$$(2.61)\qquad \begin{cases}\zeta(x,0)=\zeta_0(x)\\ \partial\zeta(x,0)/\partial t=\zeta_1(x)\end{cases}$$

还要附加类似于稳定情形的边条件(加在方程或不等方程上). ▯

3. 待考虑的问题

待考虑的问题可以是静态的或动态的. 对每一静态问题，在表面作用力上加上惯性力并规定初条件，就可得到一个与之关联的动态问题. 因此这里我们仅明确地叙述静态问题. 它们分成两组：一是古典问题，其变分提法导出方程；一是"单侧"问题，其变分提法导出不等方程.

3.1 古典问题

在 Γ 的每一点给定 F_3 或 ζ 和 M_τ 或 $\partial\zeta/\partial n$，这在物理上对应于

*) Γ 上的力密度 F_3 或 Γ 上点的位移 ζ，

**) 偶 M_τ，其矩以 Γ 的切线 τ 为轴，或 $\partial\zeta/\partial n$，这是板沿 Γ 上点的法线计算的斜率.

例

1) 嵌支板，这要求

$$(3.1)\qquad \text{在 }\Gamma\text{ 上 }\ \zeta=\partial\zeta/\partial n=0$$

2) 在 Γ 的一部分 Γ_1 上板带自由边界，在 Γ_2 上是固定边界但可绕 Γ_2 的切线自由转动. 于是有

$$(3.2)\qquad F_3=M_\tau=0,\ \Gamma_1\text{ 上}$$

$$(3.3)\qquad \zeta=M_\tau=0,\ \Gamma_2\text{ 上}$$

3.2 单侧问题

1) Ω 的点单侧位移

例如

$$(3.4)\quad \begin{cases} \zeta(x) \geqslant 0, \Omega \text{上} \\ \left.\begin{array}{l} \zeta(x) > 0 \Rightarrow f_3 = 0, \\ \zeta(x) = 0 \Rightarrow f_3 \geqslant 0, \end{array}\right\} \Omega \text{上} \end{cases}$$

Γ 上的边条件是古典型的.

2) Γ 的点单侧位移

$$(3.5)\quad \left.\begin{array}{l} \zeta(x) \geqslant 0 \\ \zeta(x) > 0 \Rightarrow F_3 = 0, \\ \zeta(x) = 0 \Rightarrow F_3 \geqslant 0, \end{array}\right\} \Gamma \text{上}$$

对 M_τ 或 $\partial\zeta/\partial n$ 在 Γ 上的条件是古典型的,而 f_3 给定.

3) Γ 的点的单侧转动

$$(3.6)\quad \begin{cases} \text{在}\Gamma\text{上}\ \partial\zeta/\partial n \geqslant 0\ \text{且} \\ \partial\zeta/\partial n > 0 \Rightarrow M_\tau = 0 \\ \partial\zeta/\partial n = 0 \Rightarrow M_\tau \leqslant 0 \end{cases}$$

对 F_3 或 ζ 在 Γ 上的条件是古典的,而 f_3 给定.

4) 在 Ω 的点上有摩擦的位移

$$(3.7)\quad \begin{cases} |f_3| < \mathscr{F}\ (\text{给定的正的常数或函数}) \Rightarrow \\ \qquad \zeta = 0, \Gamma\text{上} \\ |f_3| = \mathscr{F} \Rightarrow \text{存在}\ \lambda \geqslant 0\ \text{使}\ \zeta = -\lambda f_3 \end{cases}$$

Γ 上的条件是古典型的.

5) Γ 上的点有摩擦的位移

$$(3.8)\quad \begin{cases} |F_3| < \mathscr{F} \Rightarrow \zeta = 0, \Gamma\text{上} \\ |F_3| = \mathscr{F} \Rightarrow \text{存在}\ \lambda \geqslant 0\ \text{使}\ \zeta = -\lambda F_3 \end{cases}$$

Γ 的点的转动条件是古典型的.

6) Γ 上的点有摩擦的转动

$$(3.9)\quad \begin{cases} |M_\tau| < \mathscr{M}\ (\text{给定的正常数}) \Rightarrow \partial\zeta/\partial n = 0,\ \Gamma\text{上} \\ |M_\tau| = \mathscr{M} \Rightarrow \text{存在}\ \lambda \geqslant 0\ \text{使}\ \partial\zeta/\partial n = \lambda M_\tau, \Gamma\text{上} \end{cases}$$

Γ 上对 F_3 或 ζ 的条件是古典型的.

7) 同样能在 Γ 的一部分上有上述一种类型的条件而在 Γ 的另一部分上（所考虑的 Γ 的部分 Γ_i 满足 $\cup\Gamma_i = \Gamma$)有另一种类型的条件.

注 3.1 以下没有明确地研究问题 1) 和 4)，它们只需要用同样的方法而没有任何特别的困难；下面我们要处理那些有特殊困难的问题.

4. 稳定单侧问题

4.1 记号

把问题表成无量纲形式时，能够对 x_i 进行尺度变换以化成 $D = 1$ 的情形.

那么对于 u，$v \in H^2(\Omega)$，令

$$
(4.1)\qquad a(u, v) = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} dx + \nu \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx + 2(1-\nu) \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx
$$

Green 公式是

$$
(4.2)\qquad a(u, v) = (\Delta^2 u, v) + (F_3, v)_\Gamma - (M_\tau, \partial v/\partial n)_\Gamma
$$

令

$$
(4.3)\qquad \begin{cases} j_0(v) = \int_\Gamma (g_2 v^+ - g_1 v^-) d\Gamma \\ g_1 < 0 < g_2 \text{ [1]} \end{cases}
$$

$$
(4.4)\qquad \begin{cases} j_1(v) = \int_\Gamma [K_2(\partial v/\partial n)^+ - K_1(\partial v/\partial n)^-] d\Gamma \\ K_1 < 0 < K_2 \text{ [2]} \end{cases}
$$

---

1) 这里令 g_i 是常数. 同样可令 g_i 是 Γ 上的有界可测函数.

2) 类似于脚注 1).

4.2 (稳定)问题

问题 4.1 求 $u \in H^2(\Omega)$，满足

(4.5) $a(u, v-u) + j_0(v) - j_0(u) \geqslant (f, v-u), \forall v \in H^2(\Omega)$

(其中令 $f_3 = f$)。

问题 4.1′ 求 $u \in H^2(\Omega)$，在 Γ 上 $\partial u/\partial n = 0$，且 u 满足

(4.5)′
$$a(u, v-u) + j_0(v) - j_0(u) \geqslant (f, v-u),$$
$$\forall v \in H^2(\Omega), \text{在 } \Gamma \text{ 上 } \partial v/\partial n = 0$$

问题 4.2 求 $u \in H^2(\Omega)$，满足

(4.6) $a(u, v-u) + j_1(v) - j_1(u) \geqslant (f, v-u), \forall v \in H^2(\Omega)$

问题 4.2′ 求 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，满足

(4.6)′ $a(u, v-u) + j_1(u) - j_1(u) \geqslant (f, v-u), \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。

现在我们解释这些问题并验证它们包括(可能在取极限之后)第 3 节的问题[1]。 □

在上面所有不等方程中，取 $v = u \pm \varphi, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，即得在所有情形

(4.7)
$$\Delta^2 u = f$$

于是由 Green 公式(4.2)，推出

(4.8)
$$a(u, v-u) - (F_3, v-u)_\Gamma + (M_\tau, \partial(v-u)/\partial n)_\Gamma = (f, v-u)$$

由此对于问题(4.1)和(4.1)′

(4.9)
$$\begin{cases} (F_3, v-u)_\Gamma + j_0(v) - j_0(u) \\ \qquad - (M_\tau, \partial(v-u)/\partial n) \geqslant 0 \\ \forall v \in H^2(\Omega) \ (\text{相应地,在问题(4.1)′中} \\ \qquad \forall v \in H^2(\Omega), \text{在 } \Gamma \text{ 上 } \partial v/\partial n = 0) \end{cases}$$

对于问题(4.2)和(4.2)′

---

[1] 将以类似方式处理单侧位移或 Ω 的点的摩擦问题。

$$
(4.10)\quad \left|\begin{array}{l} -(M_\tau, \partial(v-u)/\partial n)+j_1(v)-j_1(u) \\ \quad +(F_3, v-u)_\Gamma \geqslant 0 \\ \forall v \in H^2(\Omega)\ (\text{相应地,在问题}(4.2)'\text{中,} \\ \quad \forall v,\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ v=0) \end{array}\right.
$$

问题(4.1)的边条件

这里(4.9)蕴涵(并等价于)

$$
(4.11)\quad \left|\begin{array}{l} M_\tau = 0\ \text{且} \\ \int_\Gamma [F_3(v^+ - v^-) + g_2 v^+ - g_1 v^-] d\Gamma \\ \quad -(F_3, u)_\Gamma - j_0(u) \geqslant 0 \end{array}\right.
$$

取 $\varphi \geqslant 0$, Γ 上和 $v = \pm\lambda\varphi$, $\lambda > 0$, 即得

$$
F_3 + g_2 \geqslant 0,\ F_3 + g_1 \leqslant 0,\ (F_3, u)_\Gamma + j_0(u) = 0
$$

由此

$$
(4.12)\quad \left|\begin{array}{l} -g_2 \leqslant F_3 \leqslant -g_1 \\ F_3 u + g_2 u^+ - g_1 u^- = 0,\ \text{即} \\ \quad (F_3 + g_2) u^+ + (-F_3 - g_1) u^- = 0 \end{array}\right.
$$

或

$$
(4.13)\quad \left|\begin{array}{l} -g_2 < F_3 < -g_1 \Rightarrow u = 0 \\ \quad F_3 = -g_1 \Rightarrow u \leqslant 0 \\ \quad F_3 = -g_2 \Rightarrow u \geqslant 0 \end{array}\right. \square
$$

特殊情形. $g_2 = -g_1 = \mathscr{F}$; 即第3节的问题5). □

极限情形. 取 $g_2 = 0$ 并令 g_1 趋于$-\infty$. 取极限(它存在), 则 u 满足

$$
(4.14)\quad \left|\begin{array}{l} 0 < F_3 \Rightarrow u = 0 \\ F_3 = 0 \Rightarrow u \geqslant 0 \end{array}\right.
$$

这是3.2的问题2).

这个问题的直接变分提法是

问题 4.3 引入

$$
(4.15)\qquad K_1 = \{v \mid v \in H^2(\Omega),\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ v \geqslant 0\}
$$

这是 $H^2(\Omega)$ 的闭凸集;求 u, 它是下方程的解,

$$(4.16)\quad \begin{cases} u \in K_1 \\ a(u, v-u) \geqslant (f, v-u), \ \forall v \in K_1 \end{cases}$$ ▯

问题 4.1′ 的边条件．单侧边条件(4.12)(或(4.13))不变，条件(4.11)代以

$$(4.17)\quad 在 \Gamma 上 \ \partial u/\partial n = 0$$ ▯

问题4.2的边条件．条件(4.10)蕴涵(且等价于)

$$(4.18)\quad F_3 = 0 \ 且$$

$$\int_\Gamma [(-M_\tau, (\partial v/\partial n)^+ - (\partial v/\partial n)^-) + K_2(\partial v/\partial n)^+ - K_1(\partial v/\partial n)^-]d\Gamma + (M_\tau, \partial u/\partial n)_\Gamma - j_1(u) \geqslant 0$$

由此

$$-M_\tau + k_2 \geqslant 0, \ -M_\tau + k_1 \leqslant 0, \ (M_\tau, \partial u/\partial n) - j_1(u) = 0$$

于是

$$(4.19)\quad \begin{cases} k_1 \leqslant M_\tau \leqslant k_2 \\ (k_2 - M_\tau)(\partial u/\partial n)^+ + (M_\tau - k_1)(\partial u/\partial n)^- = 0 \end{cases}$$

或

$$(4.20)\quad \begin{cases} k_1 < M_\tau < k_2 \Rightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ M_\tau = k_2 \Rightarrow \partial u/\partial n \geqslant 0 \\ M_\tau = k_1 \Rightarrow \partial u/\partial n \leqslant 0 \end{cases}$$

特殊情形

$$k_2 = -k_1 = \mathscr{M}$$

这时得到 3.2 的问题 6)． ▯

极限情形．取 $k_2 = 0$ 并令 $k_1 \to -\infty$，即得

$$\begin{cases} M_\tau > 0 \Rightarrow \partial u/\partial n = 0 \\ M_\tau = 0 \Rightarrow \partial u/\partial n \geqslant 0 \end{cases}$$

这是 3.2 的问题 3)．

这个问题的直接变分提法是

问题 4.4　引入

$$(4.21)\quad K_2 = \{v \mid v \in H^2(\Omega), 在 \Gamma 上 \ \partial v/\partial n \geqslant 0\}$$

这是 $H^2(\Omega)$ 中的闭凸集；求 u，满足

$$(4.22)\qquad \begin{cases} u \in K_2 \\ a(u, v-u) \geqslant (f, v-u), \ \forall v \in K_2 \ \square \end{cases}$$

问题 4.2′ 的边条件

单侧边条件(4.19)不变，条件(4.18)代以

$$(4.23)\qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = 0 \ \square$$

注 4.1 当 $j_0(v) = 0$，$g_1 = g_2 = 0$，问题(4.1)等价于

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in H^2(\Omega)$$

即(4.7)伴以古典型边条件

$$(4.24)\qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } M_\tau = 0, \ F_3 = 0$$

问题 4.1′ 等价于(4.7)伴以边条件

$$(4.25)\qquad \partial u/\partial n = 0, \ F_3 = 0$$

当 $j_1(v) = 0$，即 $k_1 = k_2 = 0$ 时，问题 4.2 等价于(4.7)伴以边条件(4.24)，而问题 4.2′ 等价于(4.7)伴以边条件

$$(4.26)\qquad u = 0, \ M_\tau = 0 \ \square$$

边条件为

$$(4.27)\qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = 0, \ \partial u/\partial n = 0$$

的问题(嵌支板)，其处理是直接的；这等价于在 H_0^2 上求

$$\frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

的最小值，因为

$$a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|_{H^2}^2, \ \alpha > 0, \ \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

它有唯一解. □

4.3 问题 4.1 的求解. 解存在的必要条件

为简单，令

$$(4.28)\qquad \phi(\lambda) = g_2\lambda^+ - g_1\lambda^-$$

这样

$$j_0(v) = \int_\Gamma \phi(v) d\Gamma$$

问题等价于求泛函

(4.29) $$\frac{1}{2}a(v, v) + j_0(v) - (f, v) = H(v)$$

在 $H^2(\Omega)$ 上的最小值. 用 $\mathscr{P}$ 表示阶数≤1 的多项式空间; 我们有

$$\mathscr{P} \in H^2(\Omega)\ (\text{因为}\ \Omega\ \text{有界})\ \text{且}\ a(u, p) = 0,\ \forall p \in \mathscr{P}$$

为了使解存在,应当有:

(4.30) $\forall p \in \mathscr{P}$, $H(\lambda p)$ 当 $\lambda \to \pm\infty$ 时有下界

这里

$$H(\lambda p) = j_0(\lambda p) - \lambda(f, p) = \lambda\left[\int_\Gamma p\frac{\phi(\lambda p)}{\lambda p}d\Gamma - (f, p)\right]$$

而当 $\lambda \to +\infty$ 时

$$\int_\Gamma p\frac{\phi(\lambda p)}{\lambda p}d\Gamma \to \int_\Gamma (g_2p^+ - g_1p^-)d\Gamma$$

当 $\lambda \to -\infty$ 时

$$\int_\Gamma p\frac{\phi(\lambda p)}{\lambda p}d\Gamma \to \int_\Gamma (g_1p^+ - g_2p^-)d\Gamma$$

从而(4.30)蕴涵 ($\lambda \to +\infty$)

$$\int_\Gamma (g_2p^+ - g_1p^-)d\Gamma - (f, p) \geqslant 0$$

即

(4.31) $$(f, p) \leqslant j_0(p),\ \forall p \in \mathscr{P}$$

还蕴涵 ($\lambda \to -\infty$)

$$\int_\Gamma (g_1p^+ - g_2p^-)d\Gamma - (f, p) \leqslant 0$$

即

$$-j_0(-p) - (f, p) \leqslant 0,\ \forall p \in \mathscr{P}$$

把 p 换成 $-p$,这等价于(4.31). 这就证明了

定理 4.1 为使问题 4.1 有一个解, f 必须满足(4.31).

特殊情形. 假定 $j_0 = 0$(这对应于——见注 4.1——古典型的问题). 则(4.31)等价于

$$(f, p) = 0, \ \forall p \in \mathscr{P}$$

即

(4.32) $$(f, 1) = 0, (f, x_\alpha) = 0, \ \alpha = 1, 2 \ \square$$

极限情形. 对于 $g_2 = 0$, $g_1 = -\infty$, (4.31)给出

(4.33) $$(f, p) \leqslant 0, \ \forall p \in \mathscr{P}, \ 在 \Gamma 上 p \geqslant 0$$

此外必要条件(4.33)可由不等方程(4.16)直接建立. 注意(4.16)等价于

(4.34)
$$\begin{cases} u \in K_1 \\ a(u, v) \geqslant (f, v), \ \forall v \in K_1 \\ a(u, u) = (f, u) \end{cases}$$

取 $v = p \in K_1$, 即得必要条件(4.33).

4.4 问题 4.1 的求解. 充分条件

往证

定理 4.2 设 f 在 $L^2(\Omega)$ 中给定(这可以推广), 并且 $g_1 < 0 < g_2$, g_1, g_2 有限, 又设[1]

(4.35) $$(f, p) < j_0(p), \ \forall p \in \mathscr{P}, \ p \neq 0$$

则问题 4.1 至少有一解.

注 4.2 在"$j_0 = 0$"时条件(4.32)充分; 这是经典的 Fredholm 抉择定理. 这时有无穷多个解; 若 u 是一个解, 则所有的解给定为

$$u + p, \ p \in \mathscr{P}$$

注 4.3 当 $g_2 = 0$, $g_1 = -\infty$ 时, 有类似的结果:

定理 4.2' 假定 f 在 $L^2(\Omega)$ 中给定(这可以推广). 又假定

(4.36) $$(f, p) < 0, \ \forall p \in \mathscr{P}, \ 在 \Gamma 上 \ p \geqslant 0, \ p \neq 0$$

则问题 4.3 至少有一解. $\square$

定理 4.2 的证明. 由于(4.35)和$\mathscr{P}$是有穷维的, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使

(4.37) $$(f, p) \leqslant j_0(p) - \varepsilon |p|$$

---

1) (4.31)的"强化"形式.

这里 $|\varphi| = \varphi$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的范数(显然在(4.37)中可以取不论什么范数以代替 $|\varphi|$，只是要改变 ε)。把 $v \in H^2(\Omega)$ 分解为

(4.38) $$\begin{cases} v = \tilde{v} + p, & p \in \mathscr{P} \\ (\tilde{v}, q) = 0, & \forall q \in \mathscr{P} \end{cases}$$

把 $a(v, v)$ 记为 $a(v)$，泛函(4.29)等于

(4.39) $$H(v) = H(\tilde{v} + p) = \frac{1}{2} a(\tilde{v}) + j_0(\tilde{v} + p) - (f, \tilde{v} + p)$$

而

$$j_0(\tilde{v} + p) \geqslant j_0(p) - c_1\|\tilde{v}\|, \text{这里} \|\ \ \| = H^2(\Omega) \text{中的范数}$$

$$|(f, \tilde{v})| \leqslant c_2\|\tilde{v}\|$$

暂时承认

引理 4.1 存在 $\alpha > 0$ 使

(4.40) $$a(\tilde{v}) \geqslant \alpha\|\tilde{v}\|^2,\ \tilde{v} \in H^2(\Omega),\ (\tilde{v}, q) = 0\ \forall q \in \mathscr{P}$$

则有

$$H(v) \geqslant \alpha\|\tilde{v}\|^2 - c_3\|\tilde{v}\| + j_0(p) - (f, p)$$

于是由(4.37)有

(4.41) $$H(v) \geqslant \alpha\|\tilde{v}\|^2 - c_3\|\tilde{v}\| + \varepsilon|p|$$

根据

引理 4.2 在 $H^2(\Omega)$ 中，范数 $\|v\|$ 和 $(a(\tilde{v}))^{1/2} + |p|$ 等价。

即得当 $\|v\| \to +\infty$ 时 $H(v) \to +\infty$。

于是定理证毕，剩下要验证引理。当然，引理 4.1 可由引理 4.2 得到。于是只要证明引理 4.2。证明的方法与第一章引理 7.1 相同。令

(4.42) $$|||v||| = (a(\tilde{v}))^{1/2} + |p|$$

函数 $v \to |||v|||$ 是一范数。事实上，唯一不明显之点是要证明若 $|||v||| = 0$，则 $v = 0$。这时 $a(\tilde{v}) = 0$，$|p| = 0$，于是 $p = 0$，且 $\tilde{v} \in \mathscr{P}$，这就推出 $\tilde{v} = 0$ (因 $(\tilde{v}, q) = 0, \forall q \in \mathscr{P}$)。剩下的要利用闭图象定理(如第一章引理 7.1 一样)，为此只需验证 $H^2(\Omega)$ 对于范数(4.42)是完备的。设 $v_n = \tilde{v}_n + \tilde{p}_n$ 对这个范数为一 Cauchy

序列。 $\partial^2 v_n/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ 在$L^2(\Omega)$ 中收敛而 p_n 在 $\mathscr{P}$ 中收敛。根据 Deny-Lions [1]，可得一序列 $q_n \in \mathscr{P}$，使

$$\tilde{v}_n + q_n \to w, \text{ 在 } H^2(\Omega) \text{ 中}$$

但那样就有

$$(\tilde{v}_n + q_n, q) \to (w, q), \forall q \in \mathscr{P}$$

即

$$(q_n, q) \to (w, q), \forall q \in \mathscr{P}$$

于是在 $\mathscr{P}$ 中 $q_n \to q_0$，从而在 $H^2(\Omega)$ 中 $v_n = (v_n + q_n) - q_n \to w - q_0$，即有 $v_n = \tilde{v}_n + p_n$ 在 $H^2(\Omega)$ 中收敛。

定理 4.2′ 的证明。定理 4.2′ 是 Lions-Stampacchia [1] (定理 5.1 的推论。利用这定理的记号，取 $V = H^2(\Omega)$，$p_0(v) = |v|$，$p_1(v) = (a(v))^{1/2}$；则 $Y = \mathscr{P}$，Lions-Stampacchia [1] 的定理 5.1 的假设 5.3 等价于引理 4.1)。

4.5 问题 4.1 和 4.3 中的唯一性问题

此问题尚未解决；可直接证明，若 u_1 和 u_2 是两个可能的解，则 $u_1 - u_2 \in \mathscr{P}$，但我们不能说明是否能有许多解 u 和 $u + p (p \in \mathscr{P})$ 这一问题。

这里有一个关于问题 4.3 的不完全的结果。

定理 4.3 设定理 4.2′ 的条件成立，又设 Γ 没有任何直线部分。则问题 4.3 有唯一解。

证明。设 u 和 $u + p$ 是两个可能的解。Γ 上的单侧条件是

$$u \geqslant 0, \quad F_3 \geqslant 0, \quad u \cdot F_3 = 0$$

$$u + p \geqslant 0, \quad F_3 \geqslant 0, \quad (u + p) F_3 = 0$$

但不可能有 $F_3 = 0$ p. p. 事实上，Green 公式指出

$$\int_\Omega \Delta^2 u dx = (f, 1) = -\int_\Gamma F_3 d\Gamma = 0$$

根据 $p = 1$ 时的(4.36)，这是不可能的。于是在 Γ 的一个测度 >0 的子集 E 上 $F_3 > 0$，即有在 E 上 $u = 0$ 且 $u + p = 0$，从而 $p = 0$。根据对 Γ 的假定，这是不可能的，除非 $p \equiv 0$。

4.6 问题 4.1′ 的求解

我们有下列结果:

定理 4.4 为使问题 4.1′ 有一解,必须

$$g_1 \mathrm{Mes}\Gamma \leqslant (f, 1) \leqslant g_2 \mathrm{Mes}\Gamma \tag{4.43}$$

证明. 应当在满足 $\partial v/\partial n = 0$ (Γ 上)的 $v \in H^1(\Omega)$ 的空间 V 上求 $H(v)$ 的最小值. 于是,若问题有一个解,特别 $H(\mu)(\mu \in \mathbf{R})$ 有下界,由此(用类似于定理 4.1 的方法)

$$(f, \mu) \leqslant j_0(\mu), \quad \forall \mu \in \mathbf{R}$$

取 $\mu = 1$ 和 $\mu = -1$, 此即等价于(4.43). □

后面以类似于定理 4.2 的方法证明

定理 4.5 设

$$g_1 \mathrm{Mes}\Gamma < (f, 1) < g_2 \mathrm{Mes}\Gamma \tag{4.44}$$

则问题 4.1′ 至少有一解.

这时可解决唯一性问题.

定理 4.6 在定理4.5的假设下,问题4.1′有唯一解.

证明. 设 u_1 和 u_2 是两个可能的解,则

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

即有 $u_1 - u_2 = p, p \in \mathscr{P}$. 但在 Γ 上应有 $\partial u_1/\partial n = \partial u_2/\partial n = 0$, 从而 $\partial p/\partial n = 0$. 这等于说 $p =$ 常数 $= c \in \mathbf{R}$. 于是两个可能的解有形式 u 和 $u + c$, 单侧边条件是

$$-g_2 < F_3 < -g_1 \Rightarrow u = 0 \text{ 和 } u + c = 0$$
$$F_3 = -g_1 \Rightarrow u \leqslant 0 \text{ 和 } u + c \leqslant 0$$
$$F_3 = -g_2 \Rightarrow u \geqslant 0 \text{ 和 } u + c \geqslant 0$$

在 Γ 上不可能 p.p 有 $F_3 = -g_1$ (或 $F_3 = -g_2$), 否则由 Green 公式

$$(f, 1) = -\int_\Gamma F_3 d\Gamma = \int_\Gamma g_1 d\Gamma$$

根据(4.44),这不可能. 当在一正测集 E 上有 $-g_2 < F_3 < -g_1$, 则在 E 上有 $u = u + c = 0$, 于是 $c = 0$. 唯一剩下的情形是在 Γ_1

上 $F_3=-g_1$，在 Γ_2 上 $F_3=-g_2$，$\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$，这里等式理解为两端相差一零测集．可如第一章定理 7.5 那样完成证明．

4.7 问题 4.2 的求解

问题 4.2 等价于在 $H^2(\Omega)$ 上求泛函

(4.45) $$J(v)=\frac{1}{2}a(v)+j_1(v)-(f,v)$$

的最小值．我们有

定理 4.7 为使问题 4.2 有解，必须

(4.46) $$(f,p)\leqslant j_1(p),\ \forall p\in\mathscr{P}$$

注 4.4 由于 $j_1(c)=0$，$c=$ 常数则(4.46)蕴涵

(4.47) $$(f,1)=0$$

定理 4.7 的证明．若问题 4.2 有解，则函数 $\lambda\to J(\lambda v)$ 应当有下界，仿定理 4.1 的证明，由此即得(4.46)．

进而仿定理 4.2 的证明，我们有

定理 4.8 若设

(4.48) $$(f,p)<j_1(p)\quad\forall p\in\mathscr{P},\ p\neq 0$$

则问题 4.2 有解．

易见，若 u 是解，那么 $u+c$ 亦是解；于是没有解的唯一性．确定所有解这一问题尚未完全解决．

注 4.5 问题4.2′有唯一解．事实上，形式 $a(u,v)$ 在$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 上是强制的：存在常数 $\alpha_1>0$ 使

$$a(v)\geqslant\alpha_1\|v\|^2_{H^2(\Omega)},\ \forall v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$$

更一般地，若要求 u 在 Γ 的一个非直线部分 Γ_0 上是零，则我们有相同结果．这一说明可推广到本章其它类型的问题．▯

注 4.6 为使问题 4.4 有解，必须

(4.49) $$(f,p)\leqslant 0,\ \forall p\in\mathscr{P}\cap K_2(K_2\text{ 由(4.21)定义})$$

其实

(4.50) $$\text{若 }\Gamma\text{ 是正则曲线，则 }\mathscr{P}\cap K_2=\mathbf{R}$$

事实上，若 $p=a_0+a_1x_1+a_2x_2\in\mathscr{P}$，则 $\partial p/\partial n=a_1n_1+a_2n_2$，

于是当在Γ上$a_1n_1+a_2n_2\geqslant 0$，$p\in\mathscr{P}\cap K_2$，在Γ上取法线反向的两个点即得$a_1n_1+a_2n_2=0$，因而$a_1=a_2=0$．从而有(4.50)且(4.49)等价于

(4.51) $$(f, 1)=0$$

我们不知道这个条件是否充分。

我们要给出问题 4.4 有解的一个充分条件，它的限制一定很强。

作下列假设

(4.52) $$(f, x_\alpha)=0,\ \alpha=1,2,\ (f,1)=0$$

(4.53) Ω是边界正则的有界凸开集．**这时问题** 4.4 **有解**.

事实上，这等价于在K_2上求泛函$\frac{1}{2}a(v)-(f, v)$的最小值.

而根据(4.52)和 Fredholm 抉择定理，存在$F\in H^2(\Omega)$使

(4.54) $$(f, v)=a(F, v),\ \forall v\in H^2(\Omega)$$

(F由一确定的F加上任意$p\in\mathscr{P}$而得到，我们取定一F)．于是问题等价于求

(4.55) $$a(v-F)=\mathscr{J}(v)$$

在$H^2(\Omega)$上的最小值.

现过渡到关于$\mathscr{P}$的商；引入

(4.56) $$\mathscr{H}=H^2(\Omega)/\mathscr{P}$$

并设$\varphi\to\varphi^{\cdot}$是从$H^2(\Omega)$到$\mathscr{H}$的典则映射．在$\mathscr{H}$上定义

$$a(\varphi^{\cdot}, \psi^{\cdot})=a(\varphi, \psi),\ \varphi\in\varphi^{\cdot},\ \psi\in\psi^{\cdot}$$

并定义泛函

(4.57) $$\mathscr{J}(v^{\cdot})=a(v^{\cdot}-F^{\cdot})$$

用$K_2^{\cdot}$表示K_2在映射$\varphi\to\varphi^{\cdot}$之下的象．于是问题就等价于$\mathscr{J}(v^{\cdot})$在$K^{\cdot}$上的最小化，而$a(v^{\cdot}, v)^{1/2}$等价于$\mathscr{H}$上的商范数，于是只要证明

(4.58) $$K_2^{\cdot}\quad\text{在}\ \mathscr{H}\ \text{中是闭的}$$

就有解的存在性。

设 v_j 是 K_2^* 的序列，在 $\mathscr{H}$ 中 $v_j \to v^*$. 存在 $v_j \in v_j$，在 Γ 上 $\partial v_j/\partial n \geqslant 0$ 并且可找到序列 $p_j \in \mathscr{P}$ 使

(4.59) $$v_j + p_j \to w, \text{ 在 } H^2(\Omega) \text{ 中}$$

由(4.59)推出

(4.60) $\partial v_j/\partial n + \partial p_j/\partial n \to \partial w/\partial n$，在 $L^2(\Gamma)$ 中(甚至在 $H^{1/2}(\Gamma)$ 中)

令 $\partial v_j/\partial n + \partial p_j/\partial n = a_j$，则有

(4.61) $$\partial p_j/\partial n = a_j - \partial v_j/\partial n \leqslant a_j, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}$$

由于 Ω 是边界正则的凸集，故存在一个映射 $x \to \phi(x)$，它是 $\Gamma \to \Gamma$ 的一微分同胚，且在 $y \in \Gamma$ 的法线记成 n_y 时，我们有

(4.62) $$n_{\phi(x)} = -n_x$$

令

$$p_j(x) = c_{0j} + c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2,$$

则有

$$\partial p_j(\phi(x))/\partial n = -\partial p_j(x)/\partial n$$

于是(4.61)给出

$$\partial p_j(x)/\partial n \geqslant -a_j(\phi^{-1}(x)) = b_j(x)$$

因此

(4.63) $$b_j(x) \leqslant \partial p_j(x)/\partial n \leqslant a_j(x)$$

$\{a_j\}$ 和 $\{b_j\}$ 是 $L^2(\Gamma)$ 中的有界集.

根据 $|\partial p_j(x)/\partial n| \leqslant |a_j(x)| + |b_j(x)|$ 推出

(4.64) $$\partial p_j/\partial n \text{ 在 } L^2(\Gamma) \text{ 中有界.}$$

这样就有 $|c_{1j}| + |c_{2j}| \leqslant$ 常数，于是可取一序列，仍记 c_{1j}, c_{2j} 使

(4.65) $$q_j = c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 \to q = c_1x_1 + c_2x_2$$

把(4.59)写成 $v_j + c_{0j} + q_j \to w$ (在 $H^2(\Omega)$ 中)，再结合(4.65)即得

(4.66) $$v_j + c_{0j} \to \phi = w - q, \text{ 在 } H^2(\Omega) \text{ 中}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial n}(v_j + c_{0j}) = \frac{\partial v_j}{\partial n} \to \frac{\partial \psi}{\partial n}, \text{在 } L^2(\Gamma) \text{ 中}$$

这说明 $\partial\psi/\partial n \geqslant 0$。于是 $\psi \in v^*$，此即 $v^* \in K_2$。

这就证明了解的存在性。

解 u^* 在 $\mathscr{K}$ 中唯一。解集因而由这样的 $u \in u^*$ 给定，在 Γ 上 $\partial u/\partial n \geqslant 0$。

注 4.7 自然可按第三章 3.5 的原则引进前述诸问题的对偶提法。

5. 发展单侧问题

5.1 问题的提出

沿用第 4 节的记号。又令

(5.1) $$H = L^2(\Omega)$$

如常，用 $u(t)$ 表示函数 $x \to u(x, t)$，并令

$$u'(t) = \partial u(\cdot, t)/\partial t, \; u''(t) = \partial^2 u(\cdot, t)/\partial t^2, \cdots$$

问题 5.1 求 $[0, T] \to H^2(\Omega)$ 的函数 $t \to u(t)$，$u'(t) \in H^2(\Omega)$，$u''(t) \in H$ 满足

(5.2) $$(u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j_0(v) - j_0(u'(t)) \geqslant (f(t), v - u'(t)), \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

和初条件

(5.3) $$u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1$$

这是问题 4.1 的“发展类比”。它可解释如下：首先，若 u 满足(5.2)，则

(5.4) $$\partial^2 u/\partial t^2 + \Delta^2 u = f, \text{ 在 } Q = \Omega \times]0, T[\text{ 内}$$

在 $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ 上的边条件仿第 4 节得到。即

(5.5) $$\text{在 } \Sigma \text{ 上 } M_t = 0$$

和单侧条件

$$(5.6)\quad \begin{cases} -g_2 < F_3 < -g_1 \Rightarrow \partial u/\partial t = 0, \text{ 在 } \Sigma \text{ 上} \\ F_3 = -g_1 \Rightarrow \partial u/\partial t \leqslant 0 \\ F_3 = -g_2 \Rightarrow \partial u/\partial t \geqslant 0 \end{cases} \square$$

问题 5.1′　引入空间

$$(5.7)\qquad V = \{v \mid v \in H^2(\Omega),\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } \partial v/\partial n = 0\}$$

求 $[0, T] \to V$ 的函数 $t \to u(t)$，使 $u'(t) \in V$，$u''(t) \in H$，且使 $\forall v \in V$，有(5.2)并满足初条件(5.3)

边条件是

$$(5.8)\qquad \partial u/\partial n = 0 \ (\text{代替}(5.5))$$

而单侧条件(5.6)不变。

问题 5.2　求满足问题5.1的条件的一一函数，其中 j_0 代以 j_1，即

$$(5.9)\qquad (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j_1(v) - j_1(u'(t)) \geqslant (f(t), v - u'(t));\ \forall v \in H^2(\Omega)$$

初条件是(5.3)。

这是问题 4.2 的“发展类比”。它可解释为：u 满足(5.4)，初条件(5.3)和边条件

$$(5.10)\qquad \text{在 } \Sigma \text{ 上 } F_3 = 0$$

以及

$$(5.11)\quad \begin{cases} k_1 < M_\tau < k_2 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ 在 } \Sigma \text{ 上} \\ M_\tau = k_2 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 \\ M_\tau = k_1 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{\partial u}{\partial t} \leqslant 0 \end{cases} \square$$

问题 5.2′　在问题 5.2 中，$H^2(\Omega)$ 换以 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$；求一个在 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 取值的函数u，满足 (5.9)，其中 $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 和初条件(5.3)。

问题可解释为：u 满足(5.4)，(5.3)和边条件

(5.12)　在 Σ 上 $u = 0$（这代替了(5.10)），条件(5.11)不变 $\square$

极限情形．若在问题 5.1 中(形式地)令 $g_2=0$，$g_1=-\infty$，就导致下列问题；它是问题 4.3 的"发展类比"：

问题 5.3　凸集K_1由(4.15)定义，求函数 $t\to u(t)$，使

$$
(5.13)\qquad \left|\begin{array}{l} u'(t)\in K_1 \\ (u''(t),\ v-u'(t))+a(u(t),\ v-u'(t)) \\ \qquad \geqslant (f(t),\ v-u'(t)),\ \forall v\in K_1 \end{array}\right.
$$

且有初条件(5.13)． □

问题解释为：u 是(5.4)和(5.3)的解，在 Σ 上满足

$$
(5.14)\qquad \left|\begin{array}{l} M_\tau=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\geqslant 0,\ F_3<0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}F_3=0 \quad \square \end{array}\right.
$$

同样，若在问题 5.2 中(形式地)令 $k_2=0$，$k_1=-\infty$，则有

问题 5.4　凸集 K_2 由(4.21)定义，求函数 $t\to u(t)$，满足类似于(5.13)的公式，只是 K_1 代以 K_2．

其余条件不变，边条件(5.14)代以

$$
(5.15)\qquad \left|\begin{array}{l} F_3=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0,\ M_\tau\geqslant 0,\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial n}\right)M_\tau=0 \ \square \end{array}\right.
$$

注 5.1　我们可叙述并以类似方式解决 Ω 的点有单侧位移(见 3.2.1)或 Ω 的点有摩擦(见 3.2.4)的动态问题．

5.2　发展单侧问题的求解

方法仿第三章 5.5． 我们只叙述若干结果，而不给证明．

定理 5.1　假定

$$
(5.16)\qquad f,\ f'\in L^2(0,\ T;\ H)=L^2(Q)
$$

$$
(5.17)\qquad u_0\in H^4(\Omega),\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ M_\tau(u_0)=0,\ F_3(u_0)=0
$$

$$
(5.18)\qquad u_1\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)
$$

则问题 5.1 有唯一解满足

(5.19) $$u,\ u' \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$$

(5.20) $$u'' \in L^\infty(0, T; H)$$

证明的原则是把 $j_0(v)$ 正则化为 $j_{0\varepsilon}(v)$，例如

(5.21) $$j_{0\varepsilon}(v) = \int_\Gamma \left[g_2 \frac{(v^+)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} - g_1 \frac{(v^-)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right] d\Gamma,\ \varepsilon > 0$$

并考虑正则化方程

(5.22) $(u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + (j_{0\varepsilon}'(u_\varepsilon'), v) = (f, v),\ \forall v \in H^2(\Omega)$

初条件是

(5.23) $$u_\varepsilon(0) = u_0,\ u_\varepsilon'(0) = u_1$$

由对 u_0, u_1 假设，和(5.22)推出

(5.24) $$u_\varepsilon''(0) = f(0) - \Delta^2 u_0$$

结合(5.16)可对 t 求(5.22)的导数，并得到对应于(5.19)，(5.20)的先验估计。 □

注 5.2 引入不等方程的弱解，可以减弱对 f, u_0, u_1 的假设；见 H. Brézis 和 J. L. Lions [1] 和 Brézis [2]。 □

可取 $g_2 = 0$ 且令 $g_1 = -g$, $g > 0$，问题 5.1 的对应解记为 u_g，则有

定理 5.2 假定(5.16)，(5.17)，(5.18)成立，则问题 5.3 有满足(5.19)，(5.20)的唯一解，且当 $g \to +\infty$ 时

(5.25) $$u_g \to u,\ u_g' \to u',\ \text{在 } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ 中弱}^*$$

(5.26) $$u_g'' \to u'',\ \text{在 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中弱}^*$$

为了证明，只需注意从(5.22)推出的对 u_ε, u_ε' 在 $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ 中和 u_ε'' 在 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ 中的先验估计不依赖于 ε 和 g。

注 5.3 可以用补偿法直接解问题5.3，为此以下式逼近(5.13)

(5.27) $$\begin{cases} (u_\eta'', v) + a(u_\eta, v) \\ \quad + \eta^{-1}\int_\Gamma (-(u_\eta')^-) dv d\Gamma = (f, v),\ \forall v \in H^2(\Omega) \\ u_\eta(0) = u_0,\ u_\eta'(0) = u_1 \end{cases}$$

条件“在 Γ 上 $u_1 = 0$” 可代以“在 Γ 上 $u_1 \geqslant 0$”. □

注 5.4 对问题 5.1′ 有一完全类似于定理 5.1 的结果。

关于问题 5.2，我们有

定理 5.3 假定(5.16)，(5.17)成立，又设

$$u_1 \in H^2(\Omega), \quad \partial u_1/\partial n = 0 \tag{5.28}$$

则问题 5.2 有满足(5.19)，(5.20)的唯一解.

证明的大意是，正则化 $j_1(v)$ 为 $j_{1\varepsilon}(v)$，例如

$$j_{1\varepsilon}(v) = \int_\Gamma \left\{ \frac{k_2}{1+\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^+ \right)^{1+\varepsilon} - \frac{k_1}{1+\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^- \right)^{1+\varepsilon} \right\} d\Gamma, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.29}$$ □

取 $k_2 = 0$，$k_1 = -k$，$k > 0$，设 u_k 是问题 5.2 的相应解，则有

定理 5.4 设(5.16)，(5.17)，(5.28)成立，则问题 5.4 有满足(5.19)，(5.20)的唯一解 u，且当 $k \to +\infty$ 时有

$$u_k \to u, \; u_k' \to u', \text{ 在 } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ 中弱}^* \tag{5.30}$$

$$u_k'' \to u'', \text{ 在 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中弱}^* \tag{5.31}$$ □

6. 评　　述

上述平板线性化理论是所谓 Kirchhoff 理论。还有其它的线性化理论，如Reissner和 Hencky 理论，可见 Sander 的论文[1]．还可见 A. E. H. Love [1]，S. Timoshenko 和 Woinowsky-Krieger [1] G. Kirchhoff [1] E. Reisner [1]和[2]，H. Hencky [1]，[2] A. E. Green [1]。这里没有涉及非线性理论．在作者的一篇文章中可以找到对非线性理论单侧问题的分析，它导出 Von Karman 方程。

“塑性”板问题同样导出不等方程；可见 N. Coutris[1]。

从数学观点看，如果说动态问题已经相当完满地解决，那么静态问题却不然。前面我们曾多次提到尚未解决的唯一性问题。看来解的正则性的大量问题也未解决。不过应当指出，对问题4.3和4.4，可证明，当 $f\in L^2(\Omega)$ 时有 $u\in H^2(\Omega)$（用“平行于边界的平移”法证明）。

第五章 塑性引论

1. 引 言

术语"塑料材料"包含各种特性的材料，诸如"弹-粘-塑性"，"刚-粘-塑性"，"弹性-完全塑性"，"刚性完全塑性"和"弹强化塑性"等材料。

在所有这些情形中，存在区分两种类型特性的一个界限．这个界限或者固定，或者取决于"强化的"形变的历史；在后一情形称材料是"强化的"，对此我们不予研究．在界限固定时，我们将表述弹-粘-塑性定律，由取极限，而获得刚-粘-塑性、弹性完全塑性和刚性完全塑性．在最后两节我们研究两个适用于稳定或拟稳定问题情形的特性定律：涉及的是 Hencky 定律和所谓的闭锁材料(loking material)．在后一情形，界限是关于形变给出的．

2. 弹性完全塑性 (Prandtl-Reuss 定律) 和弹-粘-塑性情形

2.1 Prandtl-Reuss 特性定律

沿用第一章的记号，我们回忆基于守恒定律的几个关系

(2.1) $\partial\rho/\partial t + \mathrm{Div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ (质量守恒定律)

(ρ 和 $\mathbf{v}$ 分别是密度和速度向量)；

(2.2) $\sigma_{ij,j} + f_i = \rho(dv_i/dt)$ (动量定恒定律)

(指标 i 和 j 取值 1 到 3)，

(2.3) $\rho(de/dt) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v)$ (能量守恒定律)

(假定热的交换是可以忽略的)．

与第三章一样，我们把这些方程线性化，这就导致在方程

(2.2)和(2.3)中要考虑等于ρ_0的常密度；方程(2.1)提供了ρ在ρ_0附近随 Div **v** 的微小变化，Div **v** 由唯一的方程(2.1)确定，而(2.2)形为

$$\rho_0(\partial^2 u_i/\partial t^2) = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{2.4}$$

$\{u_i\}$，$i = 1, 2, 3$ 是位移向量，而$\{f_i\}$表示给定(依赖于x和t)的力的体密度．方程(2.3)给出在每一时刻材料的内能．以下我们设$\rho_0 = 1$，即固定质量密度为1． □

2.1.1 预备性实验 (Tresca [1], St Venant [1], [2], Levy [1], [2])

考虑一个金属(例如软钢)杆，它承受一拉力σ，从而产生一相对伸长ε。

在一直交坐标系内，以横坐标表示ε而以纵坐标表示σ，并画出关系(ε, σ)的图(图17)．当ε从零增加时，σ增加，而点(ε, σ)描出从O出发的直线段．若继续增加ε，由点(ε, σ)描出的线从点S开始弯曲并逐渐变为一近似平行于$O\varepsilon$的线．当ε从0增加到$+\infty$时，关系(ε, σ)的图象由直线段OS和曲线弧Sz组成。

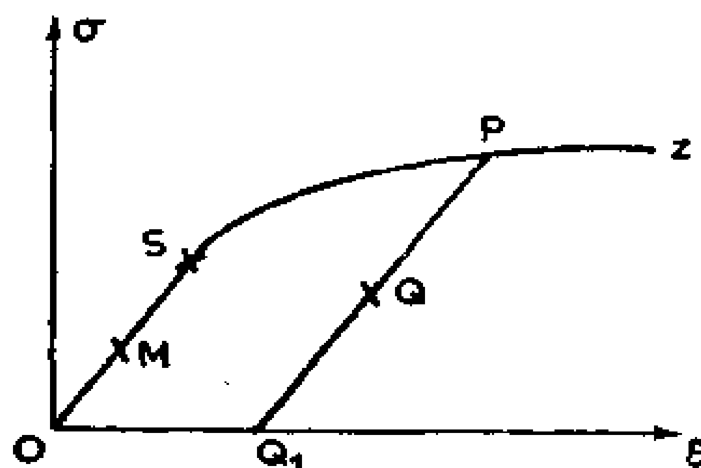


图 17

现在假定从开线段OS的一个点M出发，让ε经受符号任意的一微小变化($0 < \varepsilon < \varepsilon_S$)：可以确信，图形上的点在点$M$附近移动并停留在线段$OS$上．于是这一线段表示材料特性是线性的和可逆的，即弹性的区域。

现在我们在弧 Sz 上取点 P，而令 ε 减小．人们看到，表示 (ε,σ) 的点描出以 P 为起点的明显平行于 OS 的线段 PQ． 在点 P 材料的特性不再是可逆的；弧 Sz 表示塑性区域．

若我们延长 PQ 直到 $O\varepsilon$ 轴上的 Q_1，就又得到一个开线段 PQ_1，在其上材料的特性可逆． 并且只要 Sz 不是一条平行于 $O\varepsilon$ 轴的半直线，就有 $PQ_1 > OS$；这就是强化现象．由于这一现象我们可得到起自 Q_1 的一可逆线性特性区域，其幅度比从以原点表示的自然状态出发而获得的区域的幅度更大，因而它在实践中很有意义．

反之，若 Sz 是一条平行于 $O\varepsilon$ 的半直线（或充分接近于平行以致可以认为是平行的），我们就说其材料是完全塑性的．本节下面就这样假设． 这时，应力 σ 决不超过一个不依赖于形变状态的特定界限 g． □

我们考虑完全塑性的金属杆的特性定律（图 18）． 由于界于 $O\varepsilon$ 轴和图象 OSz 之间的区域的所有点 Q 都可由点 (ε,σ) 达到，对这种杆不能给出一个 ε 与 σ 的函数关系的特性定律． 反之，若由一点 (ε,σ) $(\sigma \leqslant g)$ 出发，给 ε 以"小"的增量 $d\varepsilon$，则 σ 取一增量为

(2.5)
$$d\varepsilon = A\,d\sigma + \bar{\lambda}$$

其中

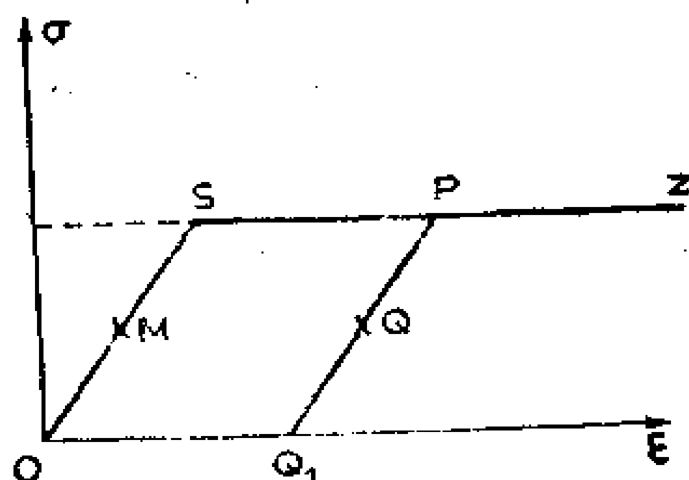


图 18

$$\begin{cases}\dot{\lambda} = 0, & \text{当 } \sigma < g \text{ 时或当 } \sigma = g,\ d\sigma < 0 \text{ 时} \\ \dot{\lambda} \geqslant 0, & \text{当 } \sigma = g \text{ 且 } d\sigma = 0 \text{ 时}\end{cases}$$

($1/A$ 是线段 OS 的斜率)。

若增量 $d\varepsilon$ 在时间 dt 达到，则特性定律(2.5)为

(2.6) $$\dot{\varepsilon} = A\dot{\sigma} + \lambda \quad (\dot{x} = \partial x/\partial t)^{1)}$$

其中

(2.7) $$\begin{cases}\lambda = 0, & \text{当 } \sigma < g \text{ 或 } \sigma = g,\ \dot{\sigma} < 0 \text{ 时} \\ \lambda \geqslant 0, & \text{当 } \sigma = g \text{ 且 } \dot{\sigma} = 0 \text{ 时}\end{cases}$$

关系(2.7)可以写成等价形式

(2.8) $$\begin{cases}\lambda(\tau - \sigma) \leqslant 0, \ \forall \tau \leqslant g \\ \lambda\dot{\sigma} = 0 \end{cases}$$ □

注 2.1 若令系数 A 趋于零，即 OS 的斜率 $1/A$ 趋于无穷，则特性定律(2.6)，(2.7)变为 $\dot{\varepsilon} = \lambda$，其中 λ 满足(2.7)。这是刚性完全塑性材料的特性定律：若 $\sigma < g$ 材料不经受任何形变，而若 $\sigma = g$，它按所指出的定律发生形变。□

2.1.2 推广

上面所得的定律可以推广到．完全塑性的三维物体。

假定弹性区域定义为

(2.9) $$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) < 0$$

而塑性区域定义为

(2.10) $$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) = 0$$

诸数值 σ_{ij} 是应力张量的分量，满足 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$。函数 $\mathscr{F}$ 关于 σ_{ij} 是连续凸的，致使 $\mathbf{R}^6$ 中的区域 $\mathscr{F}(\sigma_{ij}) \leqslant 0$ 是闭凸集。事实上，一般说来，$\mathscr{F}(\sigma_{ij})$ 只涉及张量 $\{\sigma_{ij}\}$ 的偏量 $\{\sigma_{ij}^D\}$。□

可以指出函数 $\mathscr{F}$ 的两个经典例子：

i) Von Mises 模型

(2.11) $$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D - k^2$$

---

1) 力学中这一经典记号只在建立方程时使用，而在推导中不予使用。

其中 k 是给定常数。

ii) Tresca 模型

$$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) = \sup_{i,j,i\neq j}|\sigma_i - \sigma_j| - g \tag{2.12}$$

其中 σ_i 是应力张量 $\{\sigma_{ij}\}$ 的特征值而 g 是一正数。我们证明，由 (2.12) 定义的函数 $\mathscr{F}(\sigma_{ij})$ 是凸的。对所有单位向量 $n=(n_1, n_2, n_3)$ 由 $\Sigma_i = \sigma_{ij}n_j$ 引入应力向量 Σ，分解 Σ 成一沿 n 方向的向量 Σ_N 和一垂直向量 Σ_T。容易验证——由过渡到$\{\sigma_{ij}\}$的主轴——$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) \leqslant 0$ 等价于

$$|\Sigma_T| \leqslant g, \ \forall n \ 满足 \ |n| = 1$$

其中$\mathscr{F}$由 (2.12) 给定。对所有 n，映射 $\{\sigma_{ij}\} \to \Sigma_T$ 是线性的，于是若 $\{\sigma_{ij}^{(1)}\}$ 和 $\{\sigma_{ij}^{(2)}\}$ 是两个应力张量，而 $\Sigma_T^{(1)}$ 和 $\Sigma_T^{(2)}$ 与之对应，$\alpha \in]0,1[$，则若 $|\Sigma_T^{(1)}| \leqslant g$ 且 $|\Sigma_T^{(2)}| \leqslant g$，则

$$|\alpha\Sigma_T^{(1)} + (1-\alpha)\Sigma_T^{(2)}| \leqslant \alpha|\Sigma_T^{(1)}| + (1-\alpha)|\Sigma_T^{(2)}| \leqslant g$$

这蕴涵由 (2.12) 给定的$\mathscr{F}$是凸的。□

(2.6) 在现在情形的类似是

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(u) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \tag{2.13}$$

诸系数 A_{ijkh} 是弹性系数，满足性质

$$\begin{cases} A_{ijkh} = A_{jihk} = A_{khij} \\ A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh} \geqslant \alpha\sigma_{ij}\sigma_{ij}, \quad \alpha = 常数 > 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

量 $A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh}$ 是应变速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}(u)$ 张量的弹性部分，而 λ_{ij} 由定义是塑性应变速度。

在预备性实验中，这个量 λ 满足 (2.7) 或 (2.8)，现在可推广为

$$\lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \ \forall\tau, \ \mathscr{F}(\tau_{ij}) \leqslant 0 \tag{2.15}$$

$$\lambda_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = 0 \tag{2.16}$$

(性质 (2.15) 表示了 Hill[3] 得到的极大塑性功原理。)

若诸函数 $t \to \sigma_{ij}(t)$ 关于 t 还可导——我们将作此假定——则可以 (2.15) 推出 (2.16)。

事实上，设 $\Delta t > 0$；在 (2.15) 中取

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}(t+\Delta t) \ (相应地 \ \tau_{ij} = \sigma_{ij}(t-\Delta t))$$

除以 Δt 并令 $\Delta t \to 0$；即得

$$\lambda_{ij}\dot{\sigma}_{ij}(t) \leqslant 0 \text{（相应地 } \lambda_{ij}\dot{\sigma}_{ij}(t) \geqslant 0\text{）}$$

由此得 (2.16)。

小结：弹性完全塑性材料以(2.13),(2.15)和

$$\mathscr{F}(\sigma_{ij}) \leq 0 \qquad (2.17)$$

刻画其特征。

注 2.2 如注 2.1 中的一维情形一样，可令 $A_{ijkh}=0$，而对应的特性定律是刚性完全塑性材料的特性定律。

2.2 弹-粘-塑性特性定律

在 Prandtl-Reuss（或弹性完全塑性特性）定律中，在定常应力下塑性应变速度的模可能很大：换句话说，材料不表现任何粘性：这涉及到一种理想情形，而人们可以合理地认为，幅度往往很大的塑性形变在实际中表现多少有些重要的粘性效果。正因为如此，我们将在这里写出一个弹-粘-塑性特性定律的模型，在塑性界限之下材料是弹性的，而在这个界限之上是粘-塑性型的。这个相当广泛的定律使我们由取极限而得到下列特殊情形：

i）刚性粘-塑性（$A_{ijkh}=0$）。这种情形将在下章用不同的方法做详尽的研究。

ii）弹性完全塑性（粘性系数趋于零）（前节的 Prandtl-Reuss，定律）。

iii）刚性完全塑性（$A_{ijkh}=0$ 且粘性系数趋于零）。这一情形将在 5.2 研究。□

我们引入 $\mathbf{R}^6$ 中的闭凸集

$$\tilde{K}=\{\sigma \mid \sigma=\{\sigma_{ij}\}\in \mathbf{R}^6,\ \sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ \mathscr{F}(\sigma_{ij})\leqslant 0\} \qquad (2.18)$$

其中 $\mathscr{F}$ 是 2.1.2 中那样的六个变量 σ_{ij} 的连续凸函数，还引入映射 $\sigma \to P_{\tilde{K}}(\sigma)=\sigma\in\mathbf{R}^6$ 在凸集 $\tilde{K}$ 上的正交投影，$\mathbf{R}^6$ 为通常的 Euclid 结构。

前述的特性定律为

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{u})=A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh}+\lambda_{ij} \\ \{\lambda_{ij}\}=0,\ \text{当 } \mathscr{F}(\sigma)<0 \text{ 时} \end{cases} \qquad (2.19)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2\mu}[\sigma_{ij} - (P_{\tilde{K}}(\sigma))_{ij}], \text{当 } \mathscr{F}(\sigma) \geq 0 \text{ 时}$$

其中 μ 是正数，可以把它看作粘性系数，因若 $\{\sigma_{ij}\}$ 是定常的，$(\dot{\sigma}_{ij} = 0)$，定律 (2.19) 写为

$$\sigma_{ij} = (P_{\tilde{K}}\sigma)_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\dot{u})$$

其中 μ 和 $\varepsilon_{ij}(\dot{u})$（应变速度张量）起的作用与 Navier-Stokes 流体的特性定律

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\dot{u})$$

中的相同，若 $\tilde{K} = \{\sigma | \{\sigma_{ij}\} = \text{球面张量}\}$ 则 $-p\delta_{ij} = (P_{\tilde{K}}\sigma)_{ij}$。

在 Von Mises 准则的特殊情形，即 $\mathscr{F}$ 由 (2.11) 给定，定律 (2.19) 取形式

(2.20)
$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij} = 0, \text{当 } \mathscr{F}(\sigma) < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{ij} = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\sigma_{II}^{1/2} - k}{\sigma_{II}^{1/2}}\sigma_{ij}^{D}, \text{当 } \mathscr{F}(\sigma) \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

其中 $\{\sigma_{ij}^D\}$ 表示应力张量的偏量而

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D \quad \square$$

引入从 $\mathbf{R}^6$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射：

$$\mathscr{T}_\mu(\tau) = \frac{1}{4\mu}[\tau_{ij} - (P_{\tilde{K}}\tau)_{ij}][\tau_{ij} - (P_{\tilde{K}}\tau)_{ij}]$$

定律 (2.19) 就可写成等价形式

(2.21)
$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \text{其中 } \lambda_{ij} \text{ 满足}^{1)} \\ \mathscr{T}_\mu(\tau) - \mathscr{T}_\mu(\sigma) \geq \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}), \ \forall\tau \in \mathbf{R}^6 \quad \square \end{cases}$$

粘性趋于零的情形。若 μ 趋于零，则函数 $\mathscr{T}_\mu(\tau)$ 趋于 $\mathbf{R}^6$ 的凸集 $\tilde{K}$ 的指示函数，即趋于在 $\tilde{K}$ 上为零在 $\tilde{K}$ 外等于 $+\infty$ 的"函

---

1) 亦可说 $\{\lambda_{ij}\} \in \partial\mathscr{T}_\mu(\sigma)$，这里 $\partial\mathscr{T}_\mu(\sigma)$ 表示 $\mathscr{T}_\mu$ 在 σ 的下梯度（当 $\mu>0$ 时事实上是导数）

(2.21)′ $\qquad \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma))_{ij}$.

有"凸函数($\tilde{K} \neq \emptyset$)。关系(2.21)取极限形式

$$
(2.22)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \{\lambda_{ij}\}\text{ 满足} \\ \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \ \forall \tau \in \tilde{K}, \ \sigma \in \tilde{K} \end{cases}
$$

这正是前面叙述的 Prandtl-Reuss 定律。

作为"弹性"情形极限的"刚性"情形。若 A_{ijkh} 全是零,(2.19)就是刚-粘-塑性材料的特性定律,而(2.22)则是刚性-完全塑性材料的特性定律。□

还要指出,若 $\tilde{K} = \mathbf{R}^6$,则弹-粘-塑性特性定律简单地给出

$$
\varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh}\dot{\sigma}_{kh}
$$

若假定存在材料处于无应力状态[1]的时刻 t_0 并且位移从这一状态出发进行测量,那么从 t_0 到 t 积分,上式可得

$$
\varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh}\sigma_{kh}
$$

此即弹性特性定律。□

指南　本章研究在非形变状态占据 $\mathbf{R}^3$ 的一个区域 Ω 的材料的应变,假定 Ω 的点的位移是小的.若 $u(x,t)$ 表示在非形变状态处于 Ω 的点 x 的位置在时刻 t 的位移向量,$\dot{u}(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$ 表示在时刻 t 在坐标为 $x + u(x, t)$ 的点的速度,或在时刻 t 的在非形变状态位于 x 的质点的速度。事实上,由于 $u(x, t)$ 是小的,故可认为 $\dot{u}(x,t) = \partial u(x, t)/\partial t$ 表示在点 x 的速度。同理,$\partial^2 u(x,t)/\partial t^2$ 表示在时刻 t 在点 $x + u(x, t)$ 的加速度;由于 $u(x, t)$ 是小的,故 $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$ 就看作是在点 x 的加速度。这些逼近相应于一线性化,这相当于把质点的初始位置 x 与这一质点在形变状态的位置等同看待.□

在第六章我们将研究一些对边界条件和特性定律的性质来说是流动的问题,即问题中的质点的位移是大的。$\mathbf{R}^3$ 的开集 Ω 表示流动的区域,向 $\dot{u}(x, t)$ 是在时刻 t 位于点 x 的质点的速度(圆点"·"不再表示关于 t 的偏导数,$\dot{u}(x, t)$ 依整体方式表示在时刻

---

1) 在本书所叙述的所有涉及应力张量的特性定律中这成为一隐含的假设。

t 在点 x 的速度)。为避免混淆并与常用的记号一致，我们将把 $\varepsilon_{ij}(\dot{u})$ 记为 $D_{ij}(v)$，$v = v(x, t)$ 表示在时刻 t 位于 x 的质点的速度。此记法称为流动的 Euler 记法。

所用的特性定律将是

$$
(2.23)\qquad
\begin{cases}
D_{ij}(v) = 0, & \text{若 } \sigma_{II}^{1/2} < g \\
D_{ij}(v) = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\sigma_{II}^{1/2} - g}{\sigma_{II}^{1/2}}\sigma_{ij}^{D}, & \text{若 } \sigma_{II}^{1/2} \geq g
\end{cases}
$$

(g 是一给定的正常数)。

由此推出

$$D_{kk}(v) = \mathrm{Div}\, v = 0$$

即满足上述特性定律的物质是不可压缩的。 □

2.3 涉及的问题

我们要在动态和拟静态情形研究在非形变状态下占据 $\mathbf{R}^3$ 的一区域 Ω 的材料内部的位移 $\{u_i\}$ 和应力 $\{\sigma_{ij}\}$ 的场。仿前一章，令

$$\partial\Omega = \Gamma,\ n = \Gamma \text{ 的外单位法向量},$$

$$\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F,\ \Gamma_U \cup \Gamma_F = \varnothing$$

材料满足特性定律(2.21)。我们提出下列两个问题：

问题 2.1 (动态情形) 在 $\Omega \times [0, T]$，求 $\{u_i\}$ 和 $\{\sigma_{ij}\}$，满足(2.21)和线性化了的运动方程

$$(2.24)\qquad \partial^2 u_i/\partial t^2 = \sigma_{ij,j} + f_i$$

和边条件

$$(2.25)\qquad \text{在 } \Gamma_U \text{ 上，} u_i = U_i$$

$$(2.26)\qquad \text{在 } \Gamma_F \text{ 上，} \sigma_{ij} n_j = F_i$$

及初条件，

$$(2.27)\qquad u(0) = u_0,\ \partial u(0)/\partial t = u_1$$

$$(2.28)\qquad \sigma(0) = \sigma_0$$

$f_i(x, t)$，$F_i(x, t)$，$U_i(x, t)$，$u_0(x)$，$u_1(x)$，$\sigma_0(x)$ 是对 $t \geq 0$ 给定的函数。 □

问题 2.2 (拟静态情形) 这里涉及的是这样的问题，其中已

知函数随 t 变化得充分慢，以致可以忽略运动方程中的加速度项：在 $\Omega\times[0, T]$ 中求 $\{u_i\}$ 和 $\{\sigma_{ij}\}$，满足 (2.21) 和平衡方程

(2.29) $$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

以及边条件 (2.25) 和 (2.26)，初始值

(2.30) $$u(0)=u_0$$

(2.31) $$\sigma(0)=\sigma_0$$

$f_i(x, t)$，$F_i(x, t)$，$U_i(x, t)$，$u_0(x)$，$\sigma_0(x)$ 对 $t\geqslant 0$ 是给定的. □

在第 3 节将研究问题 2.1 和 2.2，在第 4，5 节研究当 $\mu\to 0$ 或在适当意义下，$A_{ijkh}\to 0$ 时向极限情形的过渡.

3. 动态和拟静态弹-粘-塑性问题的研究

3.1 问题的变分提法

首先研究问题 2.1 的情形. 令

(3.1) $$\partial u/\partial t=v$$

一俟知道了 v，则 u 就如下确定

(3.2) $$u(t)=\int_0^t v(s)ds+u_0$$

利用这些记号和 (2.21)，(2.24)得方程为

(3.3) $$\begin{cases}A_{ijkh}\sigma'_{kh}+(\mathscr{T}'(\sigma))_{ij}-\varepsilon_{ij}(v)=0\\ v'_i-\sigma_{ij,j}=f_i, \quad \Omega\times]0,T[\text{内},^{1)}\end{cases}$$

边条件为

(3.4) $$\begin{cases}v_i=U'_i, \text{在 } \Gamma_U\times]0, T[\text{上}\\ \sigma_{ij}n_j=F_i, \text{在 } \Gamma_F\times]0, T[\text{上}\end{cases}$$

和初条件

(3.5) $$v(0)=u_1, \ \sigma(0)=\sigma_0$$

这是一个非线性偏微分方程组.(3.4) 中的边条件是非齐次的.

---

1) T 是任意固定的正数.

首先我们经过平移把方程化为齐次的．

引进函数 $\sigma^0=\{\sigma^0_{ij}\}$ 和 $v^0=\{v^0_i\}$[1]，满足

(3.6) $$\begin{cases}\sigma^0_{ij}n_j=F_i & (\text{在 }\Gamma_F\times]0,T[\text{ 上})\\ \sigma^0(0)=\sigma_0\end{cases}$$

和

(3.7) $$\begin{cases}v^0_i=U^0_i & (\text{在 }\Gamma_U\times]0,T[\text{ 上})\\ v^0(0)=u_1\end{cases}$$

引进新的未知函数

(3.8) $$v^1=v-v^0,\quad \sigma^1=\sigma-\sigma^0$$

方程 (3.3) 变为

(3.9) $$\begin{cases}A_{ijkh}\sigma^{1\prime}_{kh}+(\mathscr{T}'_\mu(\sigma^1+\sigma^0))_{ij}-\varepsilon_{ij}(v^1)=g_{ij}\\ v^{1\prime}_i-\sigma^1_{ij,j}=h_i\end{cases}$$

其中

(3.10) $$\begin{cases}g_{ij}=\varepsilon_{ij}(v^0)-A_{ijkh}\sigma^{0\prime}_{kh}\\ h_i=f_i-(v^0_i)'+\sigma^0_{ij,j}\end{cases}$$

边值和初值都变为零(正为此才作变换!)

为写法简便取消指标“1”．

现在问题提法是

(3.11) $$\begin{cases}A_{ijkh}\sigma'_{kh}+(\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0))_{ij}-\varepsilon_{ij}(v)=g_{ij}\\ v'_i-\sigma_{ij,j}=h_i\end{cases}$$

带边条件

(3.12) $$\begin{cases}\sigma_{ij}n_j=0\ \text{ 在 }\Gamma_F\times]0,T[\text{ 上}\\ v_i=0\ \text{ 在 }\Gamma_U\times]0,T[\text{ 上}\end{cases}$$

和初条件

(3.13) $$\sigma(0)=0,\quad v(0)=0\ \square$$

(仿第三章 (3.69)) 现引进

(3.14) $$\mathscr{A}(\sigma,\tau)=\int_\Omega A_{ijkh}\sigma_{kh}\tau_{ij}dx$$

和空间

1) 必要的正则性假设后面给出．

$$
(3.15)\quad \begin{cases} \mathscr{H} = \{\tau = \{\tau_{ij}\} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji},\ \tau_{ij} \in L^2(\Omega)\} \\ H = \{v = \{v_i\} \mid v_i \in L^2(\Omega)\} \end{cases}
$$

分别赋予内积[1]

$$
(\sigma, \tau) = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx
$$

$$
(v, w) = \int_\Omega v_i w_i dx
$$

进而引进

$$
(3.16)\quad \begin{cases} \mathscr{S} = \{\tau \mid \tau \in \mathscr{H}, \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega), \tau_{ij}n_j = 0, \Gamma_F \text{ 上}\} \\ V = \{v \mid v \in H,\ v_{i,j} \in L^2(\Omega),\ v_i = 0\ \Gamma_U \text{ 上}\} \end{cases}
$$

注意到

$$
(3.17)\quad (\varepsilon_{ij}(v), \tau_{ij}) + (v_i, \tau_{ij,j}) = 0,\ \forall v \in V, \tau \in \mathscr{S}
$$

若 σ 和 τ 是(3.11)和(3.12)的正则解,则有

$$
(3.18)\quad \begin{cases} \mathscr{A}(\sigma', \tau) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx = (g, \tau), \\ \qquad \forall \tau \in \mathscr{S} \\ (v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx = (h, w),\ \forall w \in V \end{cases}
$$

反之,若 σ 是 (3.18) 的"正则"解,即可推出 (3.11) 和

$$
\int_\Gamma v_i\tau_{ij}n_j d\Gamma = 0,\ \int_\Gamma \sigma_{ij}n_j w_i d\Gamma = 0
$$

即

$$
\int_{\Gamma_U} v_i\tau_{ij}n_j d\Gamma = 0,\quad \int_{\Gamma_F} (\sigma_{ij}n_j)w_i d\Gamma = 0
$$

由此得 (3.12)。

因此考虑在形式 (3.18), (3.13) 下的问题。

用同样的记号,拟静态问题表述为:

$$
(3.19)\quad \begin{cases} \mathscr{A}(\sigma', \tau) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx = (g, \tau), \\ \qquad \forall \tau \in \mathscr{S} \\ \int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx = (h, w),\ \forall w \in V \end{cases}
$$

---

1) 记法相同,不致引起混淆.

带初条件

(3.20) $$\sigma(0)=0 \quad \square$$

3.2 结果的陈述

将做如下假设

(3.21) $$g, g' \in L^2(0, T; \mathscr{H})$$

(3.22) $$h, h' \in L^2(0, T; H)^{1)}$$

及

(3.23) σ^0 不依赖于 t.

注 3.1 假设 (3.23) 对得到强解似乎是不可少的，下面得到的正是这种解. 引入弱解可能避免这一条件(但尚未得到这结果)，于是本质的困难是解的(可能有的)唯一性. $\square$

以下几节要证明

定理 3.1 设 (3.21), (3.22), (3.23) 成立，则有且仅有一对 σ 和 v, 满足

(3.24) $$\sigma, \sigma' \in L^\infty(0, T; \mathscr{H})$$

(3.25) $$v, v' \in L^\infty(0, T; H)$$

(3.26) $$\sigma_{ij,j} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

(3.27) $$v_{i,j} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

并适合 (3.18), (3.13).

注 3.2 根据 (3.26) 和 (3.27) 可以定义 $\sigma_{ij}n_j$ 和 v_i 在 Γ 上的值. 在 (3.18) 中进行分部积分即可验证. 从而有问题的强解的存在性[2].

现过渡到拟静态情形. 按 Γ_U 的测度为正或为空集区分为两种情形.

定理 3.2 设定理 3.1 的条件成立，又设 Γ_U 的测度为正且 $h(0)=0$, 则有且仅有一对函数 σ, v, 满足

(3.28) $$\sigma \in L^\infty(0, T; \mathscr{V})$$

---

1) 不难明确关于给定值 U_i, u_1, σ_0 的充分条件以使这些假设满足.

2) 还可指出, $\sigma \in L^\infty(0, T; \mathscr{V})$, $v \in L^\infty(0, T; V)$.

(3.29) $$\sigma' \in L^\infty(0, T; \mathscr{H})$$

(3.30) $$v \in L^\infty(0, T; V)$$

且适合(3.19)，(3.20)。□

当 $\Gamma_U = \varnothing$（仅在此情形），在(3.19)的第二方程取 $w = \rho \in \mathscr{R}$，即得必要条件（由于 $\int_\Omega \sigma_{ij}\rho_{i,j}dx = 0$）：

$$(h, \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \mathscr{R}$$

而当 $\Gamma_U = \varnothing$ 时，$v^\circ = 0$，从(3.10)知有

$$(f, \rho) + (\sigma^0_{ij,j}, \rho_i) = 0$$

或由(3.6)有

(3.31) $$(f, \rho) + \int_\Gamma F_N \rho_N d\Gamma = 0, \quad \forall \rho \in \mathscr{R}^{1)}$$

于是有

定理 3.3 设定理3.1的条件成立，又设 $\Gamma_U = \varnothing$ 且有(3.31)和 $h(0) = 0$，则有且仅有一 σ 和一 v，它在允许相差 $\mathscr{R}$ 中的一个元素的意义下唯一，使得有(3.28)，(3.29)，且 $\varepsilon_{ij}(v) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$，(3.19)，(3.20)。□

3.3 定理中的唯一性的证明

定理 3.1 中的唯一性

设 σ，v 和 σ_*，v_* 是两组可能的解。令

$$\hat{\sigma} = \sigma - \sigma_*, \quad \hat{v} = v - v_*$$

由(3.18)和对 σ_*，v_* 类似的方程推出

(3.32) $$\mathscr{A}(\hat{\sigma}', \tau) + (\hat{v}', w) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma_0) - \mathscr{T}'_\mu(\sigma_* + \sigma_0), \tau) + \int_\Omega \hat{v}_i \tau_{ij,j} dx + \int_\Omega \hat{\sigma}_{ij} w_{i,j} dx = 0$$

在(3.32)中取 $\tau = \hat{\sigma}$，$w = \hat{v}$，利用(3.17)和 $\sigma \to \mathscr{T}'(\sigma + \sigma_0)$ 单调的事实得出

(3.33) $$\mathscr{A}(\hat{\sigma}', \hat{\sigma}) + (\hat{v}', \hat{v}) \leqslant 0$$

1) 从而力 f_i，F_i 的集组成一个等价于 0 的转矩。

结合 $\hat{\sigma}(0)=0$, $\hat{v}(0)=0$, 由此推出 $\hat{\sigma}=0$, $\hat{v}=0$. □

定理 3.2 中的唯一性和定理 3.3 中模 $\mathscr{R}$ 的唯一性

仿前面的记号，得到

$$\mathscr{A}(\hat{\sigma}',\hat{\sigma})\leqslant 0 \tag{3.34}$$

由此推出 $\hat{\sigma}=0$.

由于 $\sigma=\sigma_*$, 利用可写成

$$-\varepsilon_{ij}(v)=g_{ij}-A_{ijkh}\sigma'_{kh}-(\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0))_{ij}$$

的 (3.19) 的第一个方程得

$$\varepsilon_{ij}(v)=\varepsilon_{ij}(v_*) \tag{3.35}$$

由此即得结果：若 Γ_U 是正测度的，则 (3.35) 推出 $v=v_*$，若 $\Gamma_U=\varnothing$，则有允许相差一个(依赖于 t 的)$\mathscr{R}$的元素的等式。 □

3.4 动态情形存在性的证明

我们要对空间变量把方程 (3.18)“正则化”.

为此目的引入

$$[\sigma,\tau]=\int_\Omega \sigma_{ij,l}\tau_{ij,l}dx \tag{3.36}$$

$$((v,w))=\int_\Omega v_{i,j}w_{i,j}dx \tag{3.37}$$

$\eta>0$ 是(要趋于 0 的)参数，考虑正则化问题

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\sigma',\tau)+(\mathscr{T}_\mu(\sigma+\sigma^0),\tau)+\eta[\sigma,\tau]+\int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx\\ \qquad\qquad\qquad\qquad=(g,\tau)\\ (v',w)+\eta((v,w))+\int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx=(h,w)\end{cases} \tag{3.38}$$

赋以初条件

$$\sigma(0)=0,\quad v(0)=0 \tag{3.39}$$

对每一 $\eta>0$，这个问题有唯一解[1].

我们来推导解 $\{\sigma,v\}$ (或为了表示对 η 的依赖，应记作 $\{\sigma_\eta, v_\eta\}$) 的先验估计，再令 $\eta\to 0$.

---

1) 这由单调抛物型问题的一般理论得到(见 Lions[1])，此外也可从以下的先验估计重新得到这一结果.

先验估计 (I) 在 (3.38) 中 τ 代以 $\sigma+\sigma^0$, w 代以 v,(由于 $(\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0), \sigma+\sigma^0)\geqslant 0$, $\int_\Omega v_i\sigma_{ij,j}dx+\int_\Omega \sigma_{ij}v_{i,j}dx=0$) 便得

$$(3.40)\quad \begin{aligned}&\mathscr{A}(\sigma',\sigma+\sigma^0)+\eta[\sigma,\sigma+\sigma^0]+(v',v)+\eta((v,v))\\&\leqslant(g,\sigma+\sigma^0)+(h,v)\end{aligned}$$

由此推出[1],当 $\eta\to 0$ 时

(3.41) $\sigma=\sigma_\eta$ 组成 $L^\infty(0,T;\mathscr{H})$ 中一有界集

(3.42) $v=v_\eta$ 组成 $L^\infty(0,T;H)$ 中一有界集

(3.43) $\eta^{\frac{1}{2}}\sigma_\eta$ (相应地 $\eta^{\frac{1}{2}}v_\eta$)组成 $L^2(0,T;\mathscr{W})$(相应地 $L^2(0,T;V)$) 中的有界集.

另外在 (3.38) 中令 $t=0$, 考虑到 (3.39) 则得

$$(3.44)\quad \left|\begin{aligned}&\mathscr{A}(\sigma'(0),\tau)=(g(0)-\mathscr{T}(\sigma^0),\tau)\\&(v'(0),w)=(h(0),w)\end{aligned}\right.$$

于是当 $\eta\to 0$ 时

(3.45) $\sigma'(0)$ (相应地, $v'(0)$) 组成 $\mathscr{H}$ (相应地, H) 中的有界集. ▯

先验估计 (II)(3.38)对 t 求导得[2]

$$(3.46)\quad \left|\begin{aligned}&\mathscr{A}(\sigma'',\tau)+((\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0))',\tau)+\eta[\sigma',\tau]+\\&\qquad\qquad\int_\Omega v'_i\tau_{ij,j}dx=(g',\tau)\\&(v'',w)+\eta((v',w))+\int_\Omega \sigma'_{ij}w_{i,j}dx=(h',w)\end{aligned}\right.$$

在 (3.46) 中取 $\tau=\sigma'$ 和 $w=v'$, 两式相加即得

$$(3.47)\quad \begin{aligned}&\mathscr{A}(\sigma'',\sigma')+\eta[\sigma',\sigma']+(v'',v')+\eta((v',v'))\\&+((\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0))',\sigma')=(g',\sigma')+(h',v')\end{aligned}$$

而

$$(3.48)\quad \left|\begin{aligned}&((\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0)'),\sigma')\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^2}(\mathscr{T}'_\mu(\sigma(t+\Delta t)+\sigma^0)-\mathscr{T}'_\mu(\sigma(t)+\sigma^0),\\&\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t))\geqslant 0\end{aligned}\right.$$ (由于 $\sigma\to\mathscr{T}'_\mu(\sigma+\sigma^0)$ 的单调性)[3]

---

1) 注意在这第一估计中,假设 (3.23) 不参与.

2) (例如)可用 Galerkin 法逼近 (3.38) 验证之.

3) 这里用到 σ^0 不依赖于 t 这一事实.

因此由 (3.47) 导出

(3.49) $$\mathscr{A}(\sigma'', \sigma') + \eta[\sigma', \sigma'] + (v'', v') + \eta((v', v')) \leqslant (g', \sigma') + (h', v')$$

注意到 (3.45)，由此得结果：当 $\eta \to 0$ 时，

(3.50) $\sigma' = \sigma'_\eta$ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中一有界集

(3.51) $v' = v'_\eta$ 组成 $L^\infty(0, T; H)$ 中一有界集

(3.52) $\eta^{\frac{1}{2}}\sigma'_\eta$（相应地，$\eta^{\frac{1}{2}}v'_\eta$）组成 $L^2(0,T;\mathscr{V})$（相应地，$L^2(0,T;V)$）中一有界集. □

对 η 取极限. 从前述估计得结论

(3.53) $\mathscr{T}'_\mu(\sigma_\eta + \sigma^0)$ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中的一有界集.

于是可取出一序列，仍记为 σ_η, v_η, 使当 $\eta \to 0$ 时有

(3.54) $\sigma_\eta, \sigma'_\eta \to \sigma, \sigma'$，在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

(3.55) $v_\eta, v'_\eta \to v, v'$，在 $L^\infty(0, T; H)$ 中弱*

(3.56) $\mathscr{T}'_\mu(\sigma_\eta + \sigma^0) \to \chi$，在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

而由于 (3.43) 可在 (3.38) 中取极限.

于是显然 σ, v 满足

(3.57) $$\begin{cases} \mathscr{A}(\sigma', \tau) + (\chi, \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau) \\ (v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \end{cases}$$

而由一"单调"型推理(正如多次做过的——又见 Lions [1]的第二章)，可验证

(3.58) $$\chi = \mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0).$$

这就证明了满足 (3.18), (3.13) 和 (3.24), (3.25) 的 σ, v 的存在性.

而由 (3.18) 导出，在广义函数意义下在柱 $\Omega \times]0, T[$ 内有 (3.11)，由此得 (3.26), (3.27)，这是由于

$$\varepsilon_{ij}(v) = A_{ijkh}\sigma'_{kh} + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0))_{ij} - g_{ij}$$

$$\sigma_{ij,j} = v'_i - f_i$$

(由此推出 (3.12)，正如已指出的那样.) □

3.5 拟静态情形存在性的证明

作为解的极限可得到拟静态问题的解。对 $\xi > 0$（将令其趋于 0），用 $\{\sigma_\xi, v_\xi\} = \{\sigma, v\}$ 表示下列问题的解：

$$(3.59)\quad \begin{cases} \mathscr{A}(\sigma', \tau) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), \\ \qquad\qquad \forall \tau \in \mathscr{S} \\ \xi(v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w), \forall w \in V \end{cases}$$

$$(3.60)\qquad \sigma(0) = 0,\ v(0) = 0$$

根据定理 3.1 我们知道此问题的一组解 $\{\sigma_\xi, v_\xi\}$ 的存在性和唯一性。

现在检查 3.4 的先验估计如何依赖于 ξ。

(3.41)，(3.42) 的类似估计是

(3.61) σ_ξ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集（当 $\xi \to 0$），

(3.62) $\xi^{\frac{1}{2}} v_\xi$ 组成 $L^\infty(0, T; H)$ 的一有界集。

在 (3.59) 中令 $t = 0$ 即得

$$(3.63)\qquad \mathscr{A}(\sigma'(0), \tau) = (g(0), \tau) - (\mathscr{T}'_\mu(\sigma^0), \tau)$$

$$(3.64)\qquad \xi v'(0) = h(0)$$

故由于在定理 3.2 和 3.3 中假设 $h(0) = 0$，

$$(3.65)\qquad v'_\xi(0) = v'(0) = 0$$

(3.50)，(3.51) 的类似估计现在是

(3.66) σ'_ξ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集，

(3.67) $\xi^{\frac{1}{2}} v'_\xi$ 组成 $L^\infty(0, T; H)$ 的一有界集。□

此外从 (3.59) 的第一个方程导出

(3.68) $\varepsilon_{ij}(v_\xi) = A_{ijkh}\sigma'_{kh} + \mathscr{T}'_\mu(\sigma + \sigma^0) - g$ （其中 $\sigma = \sigma_\xi$）

这与 (3.61) 和 (3.66) 一起蕴涵

(3.69) $\varepsilon_{ij}(v_\xi)$ 组成 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ 的一有界集。

(3.69) 的利用按 Γ_U 有正测度或 $\Gamma_U = \emptyset$ 而有所不同。

若 Γ_U 有正测度，由 (3.69) 和第三章的定理 3.3 (Korn 不等式的推论)得出结论：

(3.70) v_ξ 组成 $L^\infty(0, T; V)$ 中一有界集.

若 $\Gamma_U = \emptyset$，(如第三章所做)必须引进商空间

(3.71) $$V^\cdot = V/\mathscr{R}$$

这时

(3.72) $v_\xi^\cdot \in L^\infty(0, T; V^\cdot)$ 的有界集 □

因此可取序列，仍记为 σ_ξ, v_ξ，使得当 $\xi \to 0$ 时:

(3.73) $\sigma_\xi, \sigma'_\xi \to \sigma, \sigma'$ 在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

(3.74) (i) $v_\xi \to v$ 若 Γ_U 有正测度，在 $L^\infty(0, T; V)$ 中弱*
(ii) $v_\xi^\cdot \to v^\cdot$ 若 $\Gamma_V = \emptyset$，在 $L^\infty(0, T; V^\cdot)$ 中弱*

由一单调推理，可以在对 $\mathscr{T}'_\mu(\sigma_\xi + \sigma^0)$ 取极限。因此得出 σ 和 v 满足定理 3.2 和 3.3[1] 的条件，只是尚需验证 σ 满足 (3.26). 但这是 (3.19) 的第二个方程的推论，它可写成

$$-\sigma_{ij,j} = h_i \ \square$$

注 3.3 同时我们得到，拟静态问题的解是 (3.59), (3.60) 的解当 $\xi \to 0$ 时的极限. □

4. 弹性-完全塑性问题的研究

4.1 问题的提出

现在要在前述结果中令粘性系数 μ 趋于 0 .

在 $\mathscr{H}$ 上引入泛函

(4.1) $$\mathscr{T}(\tau) = \frac{1}{4}\int_\Omega (\tau_{ij} - (P_K\tau)_{ij})(\tau_{ij} - (P_K\tau)_{ij})dx$$

则 (3.18) 的第一个方程可写成不等方程

(4.2) $$\mathscr{A}(\sigma', \tau - \sigma) + \mu^{-1}\mathscr{T}(\tau + \sigma^0) - \mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma + \sigma^0) + \int_\Omega v_i(\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j})dx \geqslant (g, \tau - \sigma), \ \forall \tau \in \mathscr{S}$$

其余不变.

---

1) 在情形 $\Gamma_U = \phi$，在 (3.59) 的第二个方程中取极限，是由于假设 $(h, \rho) = 0$ 这一事实.

$\mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma+\sigma^0)$ 表示当 $\mu\to 0$ 时与 $\mathscr{H}$ 中的由

(4.3) $$K=\{\tau\mid\tau\in\mathscr{H},\ \tau(x)\in\tilde{K}\text{p.p. 于 }\Omega\}$$

定义的凸集相联系的补尝项。

首先形式地推理，而将其验证留待以下几节。将证明解 $\{\sigma_\mu, v_\mu\}$ 当 $\mu\to 0$ 时收敛，极限满足

(4.4) $$\sigma(t)+\sigma^0\in K$$

(4.5) $$\mathscr{A}(\sigma',\tau-\sigma)+\int_\Omega v_i(\tau_{ij,j}-\sigma_{ij,j})dx\geqslant(g,\tau-\sigma),$$
$$\forall\tau\in(K-\sigma^0)\cap\mathscr{Y}$$

(4.6) $$(v',w)+\int_\Omega\sigma_{ij}w_{i,j}dx=(h,w),\ \forall w\in V$$

(4.7) $$\sigma(0)=0,\ v(0)=0$$

我们就取 (4.4)—(4.7) 作为动态弹性-完全塑性问题的定义。
[1]

注 4.1 自然由 2.1.2 的考虑可得到同样的陈述。

注 4.2 在上述方程组中可消去 v^0。事实上，(4.6) 等价于

(4.8) $$v_i'-\sigma_{ij,j}=h_i$$

若引进

(4.9) $$S(t)=\int_0^t\sigma(t_1)dt_1$$

则 (4.8) 给出

(4.10) $$v_i(t)=S_{ij,j}+\int_0^t h_i(t_1)dt_1$$

利用记号 (3.36)，(4.5) 变为

(4.11) $$\mathscr{A}(S'',\tau-S')+\left[S+\int_0^t h(t_1)dt_1,\tau-S'\right]$$
$$\geqslant(g,\tau-S')$$

若令

(4.12) $$G(t)=g(t)-\int_0^t h(t_1)dt_1$$

---

1) 在第 3 节中亦可施行消去法，但没有特别的应用。

问题变为求 S 使满足

(4.13) $$S'(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(4.14) $$\mathscr{A}(S'', \tau - S') + [S', \tau - S'] \geqslant (G, \tau - S'), \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(4.15) $$S(0) = 0, \; S'(0) = 0$$

一旦 S 由 (4.13), (4.14), (4.15) 确定 (见后面定理 4.1), v_i 就由 (4.10) 确定且 $\sigma = S'$。□

在 (4.6) 中去掉有 v' 的项即得拟静态问题：求 σ 和 v，满足 (4.4),(4.5) 和

(4.16) $$\int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w), \; \forall w \in V$$

(4.17) $$\sigma(0) = 0$$

仍可消去 v。事实上，(4.16) 等价于

(4.18) $$-\sigma_{ij,j} = h_i$$

引入

(4.19) $$L(t) = \{\tau \mid \tau \in \mathscr{H}, -\tau_{ij,j} = h_i, \tau_{ij} n_j = 0 (\Gamma_F \text{ 上})\}$$

若在 (4.5) 中取 $\tau \in L(t) \cap (K - \sigma^0)$，则 $\int_\Omega v_i(\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx$ 是零，使得确定

(4.20) $$\sigma(t) \in (K - \sigma^0) \cap L(t)$$

(4.21) $$\mathscr{A}(\sigma', \tau - \sigma) \geqslant (g, \tau - \sigma), \; \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap L(t)$$

(4.22) $$\sigma(0) = 0$$

解 σ 的问题。

一旦 σ 确定，v 的获得就有困难，注 4.4 中还要涉及到这一点。

4.2 结果的陈述

定理 4.1 设定理 3.1 的条件成立，且

(4.23) $$\sigma^0 \in K$$

则有且仅有一函数 S 使

(4.24) $$S, S', S'' \in L^\infty(0, T; \mathscr{H})$$

(4.25) $$S, S' \in L^\infty(0, T; \mathscr{V})$$
和 (4.13), (4.14), (4.15) 成立. 还有 $\sigma = S'$, v 由 (4.10) 确定。

这就解决了动态弹性-完全塑性问题。

此外，弹性-完全塑性问题是带粘性情形当 $\mu \to 0$ 时的极限. 用 σ_μ, v_μ 表示定理 3.1 中对 $\mu > 0$ 所得到的解,则有

定理 4.2 设定理 4.1 的条件成立. 设 σ, v 是定理 4.1 确定的解,则当 $\mu \to 0$ 时

(4.26) σ_μ, $\sigma'_\mu \to \sigma$, σ', 在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

(4.27) v_μ, $v'_\mu \to v$, v', 在 $L^\infty(0, T; H)$ 中弱*

(4.28) $\sigma_{\mu ij,j} \to \sigma_{ij,j}$, 在 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱*

对拟静态情形,有

定理 4.3 设定理 4.1 的条件成立, 又设

(4.29) $$\sigma^0 = 0$$

且仿定理 3.2, 3.3, 设 $h(0) = 0$,则有且仅有一函数 σ 使

(4.30) $$\begin{cases} \sigma, \sigma' \in L^\infty(0, T; \mathscr{H}) \\ \sigma \in L^\infty(0, T; \mathscr{V}) \end{cases}$$

且满足 (4.20) (关于 t p.p. 成立)和 (4.21) (4.22).

还有

定理 4.4 条件同定理 4.3. 若 σ_μ, v_μ 表示定理 3.2 中得到的解(相应地,σ_μ, v'_μ 表示定理 3.3 中得到的解),则有

(4.31) $$\begin{cases} \sigma_\mu, \sigma'_\mu \to \sigma, \sigma', \text{在 } L^\infty(0, T; \mathscr{H}) \text{ 中的弱}^* \\ \sigma_{\mu ij,j} \to \sigma_{ij,j}, \quad \text{在 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中的弱}^* \end{cases}$$

注 4.3 关于 $\varepsilon_{ij}(v_\mu)$ 我们没有获得什么结果. □

4.3 唯一性结果的证明

设 S 和 S_* 是 (4.13), (4.14), (4.15) 的两个可能的解. 在不等方程 (4.14) 中取 $\tau = S'_*$, 相应地, 在有关 S_* 的类似不等方程中取 $\tau = S$, 两式相加,记 $\hat{S} = S - S_*$, 得

$$\mathscr{A}(\hat{S}'', \hat{S}') + [\hat{S}, \hat{S}'] \leqslant 0$$

由此 $\hat{S} = 0$. □

同样，若 σ, σ_* 是 (4.20), (4.21), (4.22) 两个可能的解，令 $\hat{\sigma} = \sigma - \sigma_*$,则有

$$\mathscr{A}(\hat{\sigma}', \hat{\sigma}) \leqslant 0$$

由此有 $\hat{\sigma} = 0$。□

4.4 定理 4.1 和 4.2 的证明

考虑定理 3.1 所给的解 σ_μ, v_μ,

$$(4.32)\quad \begin{cases} \mathscr{A}(\sigma'_\mu, \tau) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma_\mu + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_{\mu i}\tau_{ij,j}dx = (g, \tau), \\ \qquad\qquad \tau \in \mathscr{Y} \\ (v'_\mu, w) + \int_\Omega \sigma_{\mu ij} w_{i,j} dx = (h, w), \quad \forall w \in V \end{cases}$$

我们来验证第 3 节中的先验估计对 μ 的依赖性.

在 (4.32) 中用 σ_μ 和 v_μ 分别代替 τ 和 w,获得

(4.33) σ_μ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集(当 $\mu \to 0$ 时),

(4.34) v_μ 组成 $L^\infty(0, T; H)$ 的一有界集.

在 (4.3) 中令 $t = 0$,由于 $\mathscr{T}'_\mu(\sigma^0) = 0$, 即有

$$(4.35)\quad \begin{cases} \mathscr{A}(\sigma'_\mu(0), \tau) = (g(0), \tau) \\ v'_\mu(0) = h(0) \end{cases}$$

(4.32) 对 t 求导数，在所得结果中令 τ 和 w 分别为 σ'_μ 和 v'_μ, 利用 (4.35) 即得

(4.36) $\sigma'_\mu(v'_\mu)$ 组成 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})(L^\infty(0,T; H))$ 的一有界集.

此外在 (4.32) 中取 $\tau = \sigma_\mu + \sigma^0$, $w = v_\mu$ 并相加,得到

$$\int_0^T (\mathscr{T}'_\mu(\sigma_\mu + \sigma^0), \sigma_\mu + \sigma^0) dt \leqslant \text{常数} = C$$

或用 (4.1) 的记号

$$(4.37)\quad \int_0^T \mathscr{T}(\sigma_\mu + \sigma^0) dt \leqslant C\mu$$

于是可取序列，仍记 σ_μ, v_μ, 使 (4.26), (4.27) 成立。(4.32) 的第二个方程证明

$$\sigma_{\mu ij,j} = v'_{\mu i} - h_i$$

由此得 (4.28).

由(4.37)有

$$\mathscr{T}(\sigma+\sigma^0)=0$$

由此得(4.4)。

仿(4.2)，(4.32)的第一个方程可写为

$$\mathscr{A}(\sigma'_\mu,\tau-\sigma_\mu)+\int_\Omega v_{\mu i}(\tau_{ij,j}-\sigma_{\mu ij,j})dx \tag{4.38}$$

$$+\mu^{-1}\mathscr{T}(\tau+\sigma^0)-\mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma_\mu+\sigma^0)\geqslant(g,\tau-\sigma_\mu)$$

若在(4.38)中取$\tau\in K-\sigma^0$，则$\mathscr{T}(\tau+\sigma^0)=0$，而由于$\mathscr{T}(\sigma_\mu+\sigma^0)\geqslant 0$，则导出

$$\mathscr{A}(\sigma'_\mu,\tau-\sigma_\mu)+\int_\mu v_{\mu i}(\tau_{ij,j}-\sigma_{\mu ij,j})\geqslant(g,\tau-\sigma_\mu), \tag{4.39}$$

$$\tau\in K-\sigma^0$$

仿(4.9)，引人

$$S_\mu(t)=\int_0^t\sigma_\mu(t_1)dt_1 \tag{4.40}$$

如前所述，消去v_μ，可知S_μ满足不等方程

$$\mathscr{A}(S''_\mu,\tau-S'_\mu)+[S_\mu,\tau-S'_\mu]\geqslant(G,\tau-S'_\mu), \tag{4.41}$$

$$\forall\tau\in(K-\sigma^0)\cap\mathscr{Y}$$

剩下要验证由(4.9)给的S满足(4.14)，即在(4.41)中取极限，而这可由通常的手续来进行，在(4.41)中取$\tau=\tau(t)$，τ满足

$$\tau,\tau'\in L^2(0,T;\mathscr{Y}),\quad\tau(t)\in K-\sigma^0,\ \text{p.p.} \tag{4.42}$$

对t积分即得

$$\int_0^T\mathscr{A}(S''_\mu,\tau)dt+\int_0^T[S_\mu,\tau]dt-\int_0^T(G,\tau-S'_\mu)dt$$

$$\geqslant\int_0^T(\mathscr{A}(S''_\mu,S'_\mu)+[S_\mu,S'_\mu])dt$$

$$-\frac{1}{2}\mathscr{A}(S'_\mu(T),S'_\mu(T))+\frac{1}{2}[S_\mu(T),S_\mu(T)]$$

由此

$$\int_0^T\mathscr{A}(S'',\tau)dt+\int_0^T\{[S,\tau]-(G,\tau-S')\}dt$$

$$\geqslant \liminf_{\mu\to 0}\left\{\frac{1}{2}\mathscr{A}(S'_\mu(T), S'_\mu(T)) + \frac{1}{2}[S_\mu(T), S_\mu(T)]\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\mathscr{A}(S'(T), S'(T)) + \frac{1}{2}[S(T), S(T)]$$

$$= \int_0^T \{\mathscr{A}(S'', S') + [S, S']\}dt$$

因此对所有满足(4.42)的τ有

$$\int_0^T \{\mathscr{A}(S'', \tau - S') + [S, \tau - S'] - (G, \tau - S')\}dt \geqslant 0 \tag{4.43}$$

用通常的推理，由此过渡到(4.14)。(在(4.43)中除一点t的一邻域$\mathscr{O}_t$外取$\tau(t) = S'(t)$，而在$\mathscr{O}$中取$\tau(t) = \tau$，τ是$K - \sigma^0$中一固定元素；把所得结果除以$\mathrm{Mes}(\mathscr{O}_t)$，令$\mathrm{Mes}(\mathscr{O}_t)$趋于0，即导出(4.14))。□

4.5 定理 4.3 和 4.4 的证明

用$\{\sigma, v\} = \{\sigma_{\mu\xi}, v_{\mu\xi}\}$表示下列问题的解

$$\left|\begin{aligned}&\mathscr{A}(\sigma', \tau) + (\mathscr{T}'_\mu(\sigma), \tau) + \int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx = (g, \tau)\\&\xi(v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx = (h, w) \quad (\xi > 0)\end{aligned}\right. \tag{4.44}$$

$$\sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0 \tag{4.45}$$

在(4.44)中令$\tau = \sigma$，$w = v$，导出

(4.46) $\sigma_{\mu\xi}$属于$L^\infty(0, T; \mathscr{H})$中一有界集(当$\mu, \xi \to 0$)，

(4.47) $\xi^{1/2} v_{\mu\xi}$属于$L^\infty(0, T; H)$中一有界集，

同时有

$$\int_0^T (\mathscr{T}'_\mu(\sigma_{\mu\xi}), \sigma_{\mu\xi})dt \leqslant \text{常数} = C$$

从而

$$\int_0^T \mathscr{T}(\sigma_{\mu\xi})dt \leqslant C\mu \tag{4.48}$$

此外，在(4.44)中令$t = 0$得

(4.49) $\begin{cases}\sigma_{\mu\xi}(0) \text{ 属于}\mathscr{H}\text{的一个有界集} \\ v_{\mu\xi}(0)=0\end{cases}$

(4.4) 对 t 求导即有

(4.50) $\sigma'_{\mu\xi}$(相应地 $\xi^{1/2}v'_{\mu\xi}$)属于 $L^\infty(0,T;\mathscr{H})$(相应地，$L^\infty(0,T;H)$)的一有界集。

仿定理 3.2 和 3.3，可以对 ξ 取极限；于是得到定理 3.2，3.3 所给的解 $\{\sigma_\mu, v_\mu\}$ 或 $\{\sigma_\mu, v_\mu^{\cdot}\}$，并有估计

(4.51) σ_μ, σ'_μ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集

(4.52) $$\int_0^T \mathscr{T}(\sigma_\mu)dt \leqslant C\mu$$

(4.53) $\sigma_{\mu ij,j}$ 属于 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ 的一有界集

而 (3.19) 的第二个方程给出

(4.54) $$-\sigma_{\mu ij,j}=h_i$$

(3.19) 的第一个方程蕴涵 ($\sigma^0=0$)

(4.55) $$\mathscr{A}(\sigma'_\mu, \tau-\sigma_\mu)+\mu^{-1}\mathscr{T}(\tau)-\mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma_\mu) + \int_\Omega v_i(\tau_{ij,j}-\sigma_{\mu ij,j}) \geqslant (g, \tau-\sigma_\mu)$$

在 $L(t)$ (见 (4.19)) 中取 τ 即得

(4.56) $$\mathscr{A}(\sigma'_\mu, \tau-\sigma_\mu)+\mu^{-1}\mathscr{T}(\tau)-\mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma_\mu) \geqslant (g, \tau-\sigma_\mu)$$

若还有 $\tau\in K$，则 $\mathscr{T}(\tau)=0$，又 $\mathscr{T}(\sigma_\mu)\geqslant 0$，即得

(4.57) $$\mathscr{A}(\sigma'_\mu, \tau-\sigma_\mu)\geqslant(g, \tau-\sigma_\mu), \quad \tau\in K\cap L(t)$$

从 (4.51)，(4.52)，(4.53) 导出，可取一序列，仍记 σ_μ，使 (4.31) 成立。由 (4.52)，可验证 $\sigma\in K$，从而 $\sigma\in K\cap L(t)$，用通常的手续由 (4.57) 即可导出 (4.21)。 ▯

注 4.4 速度场的确定．应力场的解 $\sigma(x, t)$ 求得后，位移速度场 $\partial u(x,t)/\partial t$ 满足

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}(\partial u/\partial t)=A_{ijkh}\dot\sigma_{kh}+\lambda_{ij} \\ \lambda_{ij}(\varphi_{ij}-\sigma_{ij})\leqslant 0, \quad \forall\varphi\in K\end{cases}$$

在一般情形下由这些关系来确定 $\partial u(x, t)/\partial t$ 的问题尚未解决.

在柱形杆的弹-塑性扭转问题中，人们遇到一个类似情形，这一问题几乎以显式解决，见 6.6，注 6.3. □

注 4.5 在 Prandtl-Reuss 特性定律的拟静态情形，可以获得一直接涉及 $\partial\{\sigma_{ij}\}/\partial t$ 的变分提法（见 W. I. Koiter [1]，H. D. Bui 和 K. Dangvan [1]，C. T. Hera Kovitch 和 P. G. Hodgetn)。这一性质可用于数值分析，但似乎难于得到在 $[0, T]$ 上的整体存在性。□

5. 刚-粘-塑性和刚性-完全塑性问题的研究

5.1 刚-粘-塑性问题

我们要在下述意义下令"系数 A_{ijkh} 趋于零"[1]，

(5.1) 把 A_{ijkh} 代以 θA_{ijkh}，$\theta>0$，$\theta\to 0$

于是可考虑下列问题的解 $\{\sigma_\theta, v_\theta\}=\{\sigma, v\}$

$$(5.2)\quad \begin{cases}\theta\mathscr{A}(\sigma', \tau)+(\mathscr{T}'_u(\sigma+\sigma^0), \tau)+\int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx=(g, \tau)\\ (v', w)+\int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx=(h, w)\end{cases}$$

$$(5.3)\quad \sigma(0)=0,\ v(0)=0$$

若对 θ 形式地取极限，对一个适当的拓扑 $\sigma_\theta\to\sigma$，$v_\theta\to v$（这在下面将精确化），则可得

$$(5.4)\quad \begin{cases}(\mathscr{T}'_u(\sigma+\sigma^0), \tau)+\int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dx=(g, \tau)\\ (v', w)+\int_\Omega \sigma_{ij}w_{i,j}dx=(h, w)\end{cases}$$

$$(5.5)\quad v(0)=0$$

但要消去 σ[2]。(5.4) 的第一个方程等价于

$$(5.6)\quad \mathscr{T}'_u(\sigma+\sigma^0)=g+\varepsilon(v)\ (\text{或 } g+D(v))$$

---

1) 可以考虑更加一般的结构，甚至系数 A_{ijkh} 依赖于 x，但在 $L^\infty(\Omega)$ 中强收敛于 0。考虑 (5.1) 只是为了简化叙述。

2) 在刚-粘-塑性情形（消去 σ）和弹性-完全塑性情形（消去 v）之间有一种对偶关系。以下要阐明这一点。

或

$$g + \varepsilon(v) \in \partial \mathscr{T}_\mu(\sigma + \sigma^0) \tag{5.6'}$$

引入在 $\mathscr{H}$ 上的对偶泛函 $\mathscr{T}_\mu^*$,

$$\mathscr{T}_\mu^*(\sigma) = \sup_\tau[(\sigma, \tau) - \mathscr{T}_\mu(\tau)] \tag{5.7}$$

由于 $\mathscr{T}_\mu(\sigma) = \mu^{-1}\mathscr{T}(\sigma)$, 则可把这一定义更明确化。不难验证

$$\begin{cases} \mathscr{T}_\mu^*(\sigma) = \mu^{-1}\mathscr{T}^*(\mu\sigma) \\ \mathscr{T}^* = \mathscr{T} \text{ 的对偶泛函} \end{cases} \tag{5.8}$$

于是 (5.6)' 等价于(见 Moreau [1])

$$\sigma + \sigma^0 \in \partial \mathscr{T}_\mu^*(\varepsilon(v) + g) \tag{5.9}$$

即

$$\mathscr{T}_\mu^*(\varepsilon(w) + g) - \mathscr{T}_\mu^*(\varepsilon(v) + g) - (\sigma + \sigma^0, \varepsilon(w) - \varepsilon(v')) \geqslant 0 \tag{5.10}$$

(5.4) 的第二个方程为

$$(v', w - v) + (\sigma, \varepsilon(w) - \varepsilon(v)) - (h, w - v) = 0$$

利用 (5.10), 由此导出

$$(v', w - v) + \mathscr{T}_\mu^*(\varepsilon(w) + g) - \mathscr{T}_\mu^*(\varepsilon(v) + g) \geqslant (-\sigma^0_{ij,j} + h_i, w_i - v_i), \quad v, w \in V \quad \square \tag{5.11}$$

用同样方法可证

定理 5.1 设定理 3.1 的条件成立且有 (4.23) 和

$$g(0) = 0 \tag{5.12}$$

又设 $\{\sigma_\theta, v_\theta\}$ 是问题 (5.2), (5.3) 的解, 则有

$$\begin{cases} v_\theta, v'_\theta \to v, v', \quad \text{在 } L^\infty(0, T; H) \text{ 弱}^* \\ v_\theta \to v, \text{ 在 } L^\infty(0, T; V) \text{ 弱}^* \end{cases} \tag{5.13}$$

其中 v 是 (5.11) 和 $v(0) = 0$ 的解.

证明如往常一样建立在先验估计之上. 从 (5.2) 导出

(5.14) $\quad v_\theta$ 属于 $L^\infty(0, T; H)$ 的一有界集,

(5.15) $\quad \theta^{1/2}\sigma_\theta$ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集.

在 (5.2) 中令 $t = 0$, 由 (5.12), 有

$$\sigma'_\theta(0) = 0 \tag{5.16}$$

以及

(5.17) $$v_\theta'(0)=h(0)$$

方程 (5.2) 对 t 求导，得

(5.18) v_θ'（相应地，$\theta^{1/2}\sigma_\theta'$）属于 $L^\infty(0,T;H)$（相应地，$L^\infty(0,T;\mathscr{H})$）的一有界集。

于是 (5.2) 的第二个方程给出

(5.19) $\sigma_{\theta ij,j}$ 属于 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 的一有界集。

另外有

(5.20) $$\int_0^T(\mathscr{T}_\mu'(\sigma_\theta+\sigma^0),\sigma_\theta+\sigma^0)dt\leqslant C$$

于是 (5.2) 的第一个方程给出

(5.21) $v_{\theta ij,j}$ 属于 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 的一有界集。

由以上这些估计即导出结果。 □

注 5.1 一旦知道了 v，σ_{ij} 的确定就会遇到注 4.4 中在对偶情形的同样困难。

注 5.2 与此相联系的“拟静态”问题事实上是一个在 (5.11) 中消去有关 v' 的项所得到的简单椭圆型问题。 □

注 5.3 这里所研究的问题在第六章将在非线性结构中更精确地研究。

5.2 刚性-完全塑性问题

指南。刚性-完全塑性情形对应于

$$A_{ijkh}=0,\quad \mu=0$$

由对 A_{ijkh} 和 μ 取极限可得到这一问题，并按照首先关于 A 然后关于 μ 或相反顺序取极限的两种不同的方式进行[1]。 □

首先考虑在“刚-粘-塑性”问题中令粘性系数 μ 趋于 0 而得到的问题。

用 v_μ 表示带初条件 $v_\mu(0)=0$ 的问题 (5.11) 的解。 这里仅有形式上的结果。

---

1) 两种过渡到极限的方式的等价性问题尚未完全解决。

首先注意，从先验估计 (5.14) 和 (5.18) 出发可得

(5.22) v_μ, v'_μ 属于 $L^\infty(0, T; H)$ 中一有界集。

此外还可验证

(5.23) $\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to 0} \mu^{-1}\mathscr{T}^*(\mu\sigma) = j^*(\sigma) \\ j \text{ 是 } \mathscr{H} \text{ 上的一个连续、凸、非可微且} \geqslant 0 \text{ 的泛函。} \end{cases}$

根据 (5.22) 可取一个序列，仍记 v_μ，使

(5.24) v_μ, $v'_\mu \to v$, v', 在 $L^\infty(0, T; H)$ 中弱*

利用 (5.8), (5.23) 在 (5.11) 中形式上取极限即得

(5.25) $$(\sigma', w - v) + j^*(\varepsilon(w) + g) - j^*(\varepsilon(v) + g) \geqslant (h_i - \sigma^0_{ij,j}, w_i - v_i), \quad \forall w \in V$$

(5.26) $$v(0) = 0 \quad \square$$

若首先对 μ 取极限，按第 4 节得到

(5.27) $$\theta\mathscr{A}(S''_\theta, \tau - S'_\theta) + [S_{\theta,\tau} - S'_\theta] \geqslant (G, \tau - S'_\theta), \quad \forall \tau, \ \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(5.28) $$S'_\theta(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(5.29) $$S_\theta(0) = 0, \ S'_\theta(0) = 0$$

的一个解 S_θ。

现令 $\theta \to 0$。若 $G(0) = 0$ (即 $g(0) = 0$)，则可验证

(5.30) S_θ, S'_θ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{Y})$ 的一有界集，

(5.31) $\theta^{1/2}S''_\theta$ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集。

这些估计对取极限是够用的。

刚性-完全塑性问题在于求 S，满足

(5.32) $$S'(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(5.33) $$[S, \tau - S'] \geqslant (G, \tau - S'), \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathscr{Y}$$

(5.34) $$S(0) = 0$$

于是有

定理 5.2 设定理 4.1 的假设成立，且 $g(0) = 0$，则问题 (5.32), (5.33), (5.34) 有唯一解满足

(5.35) $$S, S' \in L^\infty(0, T; \mathscr{Y})$$

又若以 S_θ 表示 (5.27), (5.28), (5.29) 的解，则有

(5.36) $S_\theta, S'_\theta \to S, S'$，在 $L^\infty(0, T; \mathscr{V})$ 弱*

并有

(5.37) $$\sigma = S'$$

注 5.4 "关于 S" 和"关于 v" 的陈述互为对偶. □

注 5.5 根据 Brézis[1] 的想法，可以给出"关于 S"的问题的另一对偶形式. 引入 $K - \sigma^0$ 的指示泛函 ψ，

(5.38) $$\begin{cases}\psi(\sigma) = 0, \text{当 } \sigma \in K - \sigma^0 \text{ 时}, \\ \psi(\sigma) = +\infty, \text{其他}\end{cases}$$

此外，$\tau \to (G, \tau)$ 在 $\mathscr{H}$ 上，从而在 $\mathscr{V}$ 上连续，故有

(5.39) $$(G, \tau) = [\tilde{G}, \tau]$$

则 (5.33) 等价于

(5.40) $$[S - \tilde{G}, \tau - S'] + \psi(\tau) - \psi(S') \geq 0, \ \forall \tau$$

即

(5.41) $$-(S - \tilde{G}) \in \partial\psi(S')$$

引入 ψ 在 $\mathscr{V}$ 上的对偶(或共轭)函数

(5.42) $$\psi^*(\sigma) = \sup_{\tau \in \mathscr{V}}\{[\sigma, \tau] - \psi(\tau)\}$$

并令

(5.43) $$R = -S + \tilde{G}$$

那么 (5.41) 等价于 $R \in \partial\psi(S')$，这又等价于 $S' \in \partial\psi^*(R)$，即

$$-[S', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq 0.$$

于是

$$[R', \tau - R] - [\tilde{G}', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq 0$$

最后有

(5.44) $$[R', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq (G', \tau - R)$$

有初条件

(5.45) $$R(0) = \tilde{G}(0) = 0$$

问题 (5.44)，(5.45) 有唯一解，满足

(5.46) $$R, R' \in L^\infty(0, T; \mathscr{V})$$ □

6. Hencky 定律。弹-塑性扭转问题

6.1 特性定律

这个定律涉及应力-应变的关系

$$
(6.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh}\sigma_{kh} + \lambda_{ij} \\ \mathscr{F}(\sigma) \leqslant 0 \\ \lambda_{ij}(\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \ \forall\varphi, \ \mathscr{F}(\varphi) \leqslant 0 \end{cases}
$$

此定律是 Hencky [1] 为解决不考虑形变历史的静态或拟静态问题而引进的。 []

实际上，此定律可以得到与 Prandtl-Reuss 定律相同的解。 特别，在柱形杆的扭转问题中会遇到这种情形。（见 H. Brezis[2] 和 H. Lanchon [1]，[2]，[4]）。

6.2 待解决的问题

我们求 Ω 内的位移场 $\{u_i(x)\}$ 和应力场 $\{\sigma_{ij}(x)\}$ 使

$$(6.2)\qquad \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \ \Omega \text{ 内}$$

$$(6.3)\qquad \sigma_{ij}n_j = F_i, \ \Gamma_F \text{ 上}$$

$$(6.4)\qquad u_i = U_i, \ \Gamma_U \text{ 上}.$$

记号和几何意义与本章前几节同，给定的 f_i, F_i, U_i 只是 x 的函数。

6.3 关于应力的变分提法

仿第 2 节，引入 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，闭凸集 $K\subset\mathscr{H}$ 和允许位移集

$$(6.5)\qquad \mathscr{U}_{ad} = \{v \mid v = \{v_i\}, \ v_i \in H^1(\Omega), \ v_i = U_i, \Gamma_U \text{上}\}$$

为 $\mathscr{U}_{ad}$ 是非空集，这暗中假定了

(6.6) U_i 是 $H^{1/2}(\Gamma)$ 的一个元素在 Γ_U 上的限制。

还设

$$(6.7)\qquad f_i \in L^2(\Omega), \ F_i \in L^2(\Gamma_F)$$

我们定义

$$(6.8)\quad M=\{\varphi\mid\varphi\in\mathscr{H},\ \varphi_{ij,j}+f_i=0,\ \Omega\text{内},\ \varphi_{ij}n_j=F_i\Gamma_F\ \text{上}\}$$

如前，令

$$(6.9)\qquad \mathscr{A}(\varphi,\psi)=\int_\Omega A_{ijkh}\varphi_{kh}\psi_{ij}dx$$

这表示与$\mathscr{H}$上的经典范数等价的一个范数。

若 $\{u_i,\sigma_{ij}\}$ 是问题 (6.1)—(6.4) 的解，则应力场 $\{\sigma_{ij}\}$ 使泛函

$$\frac{1}{2}\mathscr{A}(\varphi,\varphi)-\int_{\Gamma_U}U_i\varphi_{ij}n_jd\Gamma$$

取 $K\cap M$ (假定非空)上的最小值。

证明。逐点特性定律 (6.1) 等价于

$$(6.10)\qquad \begin{cases}\varepsilon_{ij}(u)=A_{ijkh}\sigma_{kh}+\lambda_{ij}\\ \sigma\in K\\ \int_\Omega\lambda_{ij}(\varphi_{ij}-\sigma_{ij})dx\leqslant 0,\ \forall\varphi\in K\end{cases}$$

由此直接导出

$$\int_\Omega\varepsilon_{ij}(u)(\varphi_{ij}-\sigma_{ij})dx\leqslant\int_\Omega A_{ijkh}\sigma_{kh}(\varphi_{ij}-\sigma_{ij})dx,\ \forall\varphi\in K$$

由分部积分得

$$(6.11)\quad \mathscr{A}(\sigma,\varphi-\sigma)\geqslant\int_{\Gamma_U}U_i(\varphi_{ij}-\sigma_{ij})n_jd\Gamma,\ \forall\varphi\in K\cap M$$

这等价于 $\{\sigma_{ij}\}$ 使泛函

$$(6.12)\qquad I(\varphi)=\frac{1}{2}\mathscr{A}(\varphi,\varphi)-\int_{\Gamma_U}U_i\varphi_{ij}n_jd\Gamma$$

取 $K\cap M$ 上的最小值。

由此立得

定理 6.1 若 $K\cap M\neq\varnothing$，则存在唯一的 σ 使 $I(\varphi)$在 σ 上取 $K\cap M$ 上的最小值。 ▯

6.4 位移场的研究

现提出问题，“是否存在跟 σ 相应的 u?”这一问题要用一对偶

方法来解决。

关于对偶的回顾 (Moreau [1], Rockafellar [1], R. Témam [1], [2]). 设 X 和 Y 是两个自反或不自反的 Banach 空间而 $L \in \mathscr{L}(X, Y)$.

F 和 G 分别是定义在 X 和 Y 上的函数，在 $]-\infty, +\infty]$ 中取值，且是凸的、下半连续和固有的(即不恒等于 $+\infty$).

设 F^* 和 G^* 是 F 和 G 分别定义在 X^* 和 Y^* 上的共轭凸函数，其中

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{(x, x^*) - F(x)\}$$

这里 (x, x^*) 表示 X 和 X^* 间的对偶 ($F^{**} = F$).

又设 L^* 是 L 的共轭映射，我们有

$$L^* \in \mathscr{L}(Y^*; X^*)$$

在假设 $\exists x_0 \in X$ 使

1) $F(x_0) < \infty$

2) G 在 Lx_0 有限且连续

之下，我们有，存在 y_0^* 使

$$\text{(6.13)} \quad \operatorname*{Inf}_{y^* \in Y^*}[F^*(L^*y^*) + G^*(-y^*)] = F^*(L^*y_0^*) + G^*(-y_0^*)$$

且

$$\text{(6.14)} \quad \operatorname*{Inf}_{y^* \in Y^*}[F^*(L^*y^*) + G^*(-y^*)] + \operatorname*{Inf}_{x \in X}[F(x) + G(Lx)] = 0$$

若还存在 $\operatorname{Inf}[F(x) + G(Lx)]$ 的解 x_0，则

$$\text{(6.15)} \qquad F(x_0) + F^*(L^*y_0^*) = (L^*y_0^*, x_0)$$

且

$$\text{(6.16)} \qquad G(Lx_0) + G^*(y_0^*) = (y_0^*, Lx_0) \ \square$$

应用

$$\begin{cases} X = Y = (L^2(\Omega))^6 = \mathscr{H} \\ L = \text{恒等映射} \end{cases}$$

定义

$$\text{(6.17)} \qquad F(\epsilon) = -\operatorname*{Inf}_{\tau \in K}\left\{\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - (\epsilon, \tau)\right\}$$

$$= \sup_{\tau \in K} \left\{ (e, \tau) - \frac{1}{2} \mathscr{A}(\tau, \tau) \right\}$$

对 X 中给定的 e 设 τ_e 是

(6.18) $\mathscr{A}(\tau_e, \tau - \tau_e) - (e, \tau - \tau_e) \geqslant 0, \ \forall \tau \in K; \ \tau_e \in K$

的解，易于验证

(6.19) 映射 $e \to \tau_e$ 从 X 到 X 是 Lipschitz 连续的，且

(6.20) $\begin{cases} F(e) = -\dfrac{1}{2} \mathscr{A}(\tau_e, \tau_e) + (e, \tau_e), \text{在 } X \text{ 上连续} \\ F \text{ 是凸的(因它是线性函数族的上包络)}. \end{cases}$

令

(6.21) $G(e) = \begin{cases} -(v, f) - \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma, \text{当 } e = \varepsilon_{ij}(v), v \in \mathscr{U}_{ad} \\ +\infty, \text{其他} \end{cases}$

若 Γ_U 测度为正，则 $e = \{\varepsilon_{ij}(v)\}$，$v \in \mathscr{U}_{ad}$ 的集合是 X 的闭凸集.

事实上，若 $\varepsilon_{ij}(v_n)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，在 $\mathscr{U}_{ad}$ 中取 v_0，则 $\varepsilon_{ij}(v_n - v_0)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，在 Γ_U 上 $v_n - v_0 = 0$，于是 $v_n - v_0$ 在 $(H^1(\Omega))^3$ 中收敛，在 $(H^1(\Omega))^3$ 中，$v_n \to v$，故 $\varepsilon_{ij}(v_n) \to \varepsilon_{ij}(v)$.

由上可得，G 是 $\mathscr{X}$ 上的一国有凸函数，又由 (6.20)，则应用对偶的条件已经具备.

于是考虑问题

(6.22) $$\operatorname*{Inf}_{e \in \mathscr{X}} [F(e) + G(e)]$$

即

(6.22)′ $$\operatorname*{Inf}_{v \in \mathscr{U}_{ad}} \left[\sup_{\tau \in K} \left[(\varepsilon(v), v) - \frac{1}{2} \mathscr{A}(\tau, \tau) \right] - (v, f) - \int_{\Gamma_F} v_i F_i d\Gamma \right]$$

我们不知道这个问题一般是否有解，但不按一般理论，我们来直接证明

定理 6.2 (6.22)′ 的对偶问题是关于应力的原始问题.

证明．根据(6.14)，只需证明

i) $F^*(\tau)=\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)+\phi_K(\tau)$，$\phi_K$ 是K的指示函数，由于F定义为 $\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)+\phi_K(\tau)$ 的共轭函数，故这是显然的．

ii) $G^*(\tau)=\int_{\Gamma_U}U_i\tau_{ij}n_j d\Gamma+\phi_M(-\tau)$

(由于(6.22)′的对偶问题就是

$$\operatorname*{Inf}_{\tau\in\mathscr{Y}}[F^*(\tau)+G^*(-\tau)]$$

$$=\operatorname*{Inf}_{\tau\in K\cap M}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)-\int_{\Gamma_U}u_i\tau_{ij}n_j d\Gamma\right].\ )$$

我们来计算 $G^*(\tau)$：

$$G^*(\tau)=\sup_{v\in\mathscr{U}_{ad}}\left[(\tau,\varepsilon(\sigma))+(f,v)+\int_{\Gamma_F}v_iF_i d\Gamma\right]$$

$$=\sup_{v\in\mathscr{U}_{ad}}\left[\int_\Omega(\tau_{ij}\varepsilon_{ij}(\sigma)+f_iv_i)dx+\int_{\Gamma_F}v_iF_i d\Gamma\right]$$

上确界为 $+\infty$，除非

(6.23) $$-\tau_{ij,j}+f_i=0$$

这时

$$G^*(\tau)=\sup_{v\in\mathscr{U}_{ad}}\left[\int_{\Gamma_F}(\tau_{ij}n_j+F_i)v_i d\Gamma+\int_{\Gamma_U}\tau_{ij}n_jv_i d\Gamma\right]=+\infty$$

除非

(6.24) $$-\tau_{ij}n_j=F_i\ (\Gamma_F\ \text{上})$$

由上可见

$$G^*(\tau)=\int_{\Gamma_U}\tau_{ij}n_jU_i d\Gamma+\phi_M(-\tau)\quad\square$$

定理 6.3 若问题(6.22)′有一解 u，且 σ 是原始问题的解（定理 6.1)，则 u 和 σ 满足 (6.1)—(6.4)．

证明．事实上，我们有，在 Γ_U 上 $u=U$，$\sigma\in K\cap M$．于是(6.2)，(6.3)，(6.4)满足．由(6.15)得

$$F(\varepsilon(u))+F^*(\sigma)=(\sigma,\varepsilon(u))$$

而由定理 6.2 的证明 (i)知，$F^*(\sigma) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma, \sigma)$，故

$$\frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma, \sigma) - (\sigma, \varepsilon(u)) = -F(\varepsilon(u))$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\tau \in K}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - (\varepsilon(u), \tau)\right]$$

从而

$$\frac{1}{2}\mathscr{A}(\sigma,\sigma) - (\sigma,\varepsilon(u)) \leqslant \frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - (\varepsilon(u), \tau),$$

$$\forall \tau \in K$$

这等价于

$$\mathscr{A}(\sigma, \tau - \sigma) - (\varepsilon(u), \tau - \sigma) \geqslant 0, \quad \forall \tau \in K$$

由此得 (6.1).

6.5 满足 Von Mises 准则的各向同性材料

设 $\mathscr{F}$ 由 (2.11) 给定而系数 A_{ijkh} 对应于第三章满足(2.14)的弹性定律. 计算 $\mathscr{A}(\sigma, \tau)$ 得

$$\mathscr{A}(\sigma, \tau) = \frac{1}{9K_0}\int_\Omega \sigma_{kk}\delta_{ij}\tau_{ij}dx + \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \sigma^D_{ij}\tau_{ij}dx$$

(用 K_0 表示体积压缩模量，以免与凸集 K 混淆).

而

$$\sigma^D_{ij}\tau_{ij} = \sigma^D_{ij}\tau^D_{ij}, \quad \delta_{ij}\tau_{ij} = \tau_{ii}$$

故

$$\mathscr{A}(\sigma, \tau) = \frac{1}{9K_0}\int_\Omega \sigma_{kk}\tau_{jj}dx + \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \sigma^D_{ij}\tau^D_{ij}dx$$

于是

$$\sup_{\tau \in K}\left[(\varepsilon(v),\tau) - \frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)\right]$$

$$= \sup_{\tau \in K}\left[\int_\Omega \tau^D_{ij}\varepsilon^D_{ij}(v) + \frac{1}{3}\tau_{kk}\varepsilon_{kk}(v)\right.$$

$$-\frac{1}{18K_0}-(\tau_{kk})^2-\frac{1}{4\mu}\tau_{ij}^D\tau_{ij}^D\Big]dx$$

容易得到

$$\operatorname{Sup}\Big[(\varepsilon(v),\tau)-\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau,\tau)\Big]$$

$$=\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}K_0(\mathrm{Div}v)^2+\Phi(\varepsilon^D(v))\Big]dx$$

其中 Φ 给定为

$$\Phi(\varepsilon^D)=\begin{cases}\mu\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D, & \text{当 } \varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D\leqslant k^2/2\mu^2 \text{ 时}\\ k((2\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D)^{1/2}-k/2\mu), & \text{当 } \varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D>k^2/2\mu^2 \text{ 时}\end{cases}$$

于是问题 (6.22)′ 成为

$$(6.25)\qquad \operatorname*{Inf}_{v\in\mathscr{U}}\Big\{\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}K_0(\mathrm{Div}\ v)^2+\Phi(\varepsilon^D(v))\Big]dx-(f,v)-\int_{\Gamma_F}F_iv_id\Gamma\Big\}$$

要求取最小值的泛函在 $(H^1(\Omega))^3$ 上在无穷远未必取无穷大值;反之在 $(W^{1,1}(\Omega))^3$[1] 上是如此，至少在下列重要情形是这样.

i) $f_i=F_i=0$ (在柱形杆的弹塑性扭转问题中遇到这种情形. 见下面的 6.6).

ii) $F_i=0$ 且 $f_i=\partial q/\partial x_i$, $q\in H_0^1(\Omega)$, 因这时 $(f,v)=-(q,\mathrm{Div}\ v)$ 而当 $|\mathrm{Div}\ v|_{L^2(\Omega)}\to+\infty$, $\frac{1}{2}K_0\int_\Omega(\mathrm{Div}v)^2dx-c|\mathrm{Div}v|_{L^2(\Omega)}\to+\infty$.

iii) 存在 $\sigma_1\in K\cap M$ 使

$$C_1=\sup\frac{1}{2}\sigma_{1ij}^D\sigma_{1ij}^D<k^2$$

事实上，这时

---

1) $W^{1,1}(\Omega)=\{\varphi|\varphi,\partial\varphi/\partial x_1,\cdots,\partial\varphi/\partial x_n\in L^1(\Omega)\}$.
注意与非参数极小曲面理论的类似性，这里有泛函 $\int_\Omega(1+|\mathrm{grad}|^2)^{1/2}dx$，它在 $W^{1,1}(\Omega)$ 上在无穷远取值为无穷.

$$(f, v) + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma = \int_\Omega \sigma_{1ij}\varepsilon_{ij}(v)dx - \int_{\Gamma_U} U_i\sigma_{1ij}n_j d\Gamma$$

而

$$\int_\Omega \sigma_{1ij}\varepsilon_{ij}(v)dx = \frac{1}{3}\int_\Omega \sigma_{1ii} \text{ Div } v dx + \int_\Omega \sigma_{1ij}^D \varepsilon_{ij}^D(v)dx$$

其中最后一项满足

$$\left|\int_\Omega \sigma_{1ij}^D \varepsilon_{ij}^D(v)dx\right| \leqslant (2C_1)^{1/2}\int_\Omega (\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D)^{1/2}dx$$

于是可以在空间 $((L^\infty(\Omega))')^6$ 中定义 (6.25) 的"十分弱"的解。为此，在 $(W^{1,1}(\Omega))^3$ 上而不是在 $(H^1(\Omega))^3$ 上考虑 (6.25) 中的泛函；注意到 $K\subset(L^\infty(\Omega))^6$，对偶问题仍是关于应力的问题

$$(6.26) \qquad \text{Inf}\left[\frac{1}{2}\mathscr{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} U_i\tau_{ij}n_j d\Gamma\right], \tau \in K\cap M$$

由于当 $\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)} \to +\infty$ 时

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}K_0(\text{Div } v)^2 + \Phi(\varepsilon^D(v))\right]dx - (f, v) - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma \to +\infty$$

(在 $(H^1(\Omega))^3$ 上的类似事实不真) 故根据 R. Temam [2] 得到 (6.26) 的对偶问题在 $((L^\infty(\Omega))')^6$ 中有解。并且，根据 (6.16)，Hencky 特性定律在 $(L^\infty(\Omega))'$ 和 $L^\infty(\Omega)$ 之间的对偶意义下是满足的。

6.6 柱形杆的扭转 (图 19) (见 Annin [1], Lanchon [1]—[4], Ting [1][2])

这里 $\mathbf{R}^3$ 的区域 Ω 是由方程为 $x_3 = 0$ 和 $x_3 = h$ (h 为给定的正长度) 的平面部分 Γ_0 和 Γ_1 和侧面 Γ_2 所包围的无孔柱形。仍以 n 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法线。我们加上在 6.2 中考虑过的边条件，确切说来是

$$(6.27) \qquad \begin{cases} \text{在 } \Omega \text{ 内 } f_i = 0 \\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上 } \sigma_{ij}n_j = 0 \ (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

(6.28) 在 Γ_0 和 Γ_1 上 $\sigma_3 = 0$

(6.29) 在 Γ_0 和 Γ_1 上 $u_i = \alpha\varepsilon_{i3j}x_jx_3$

(换言之

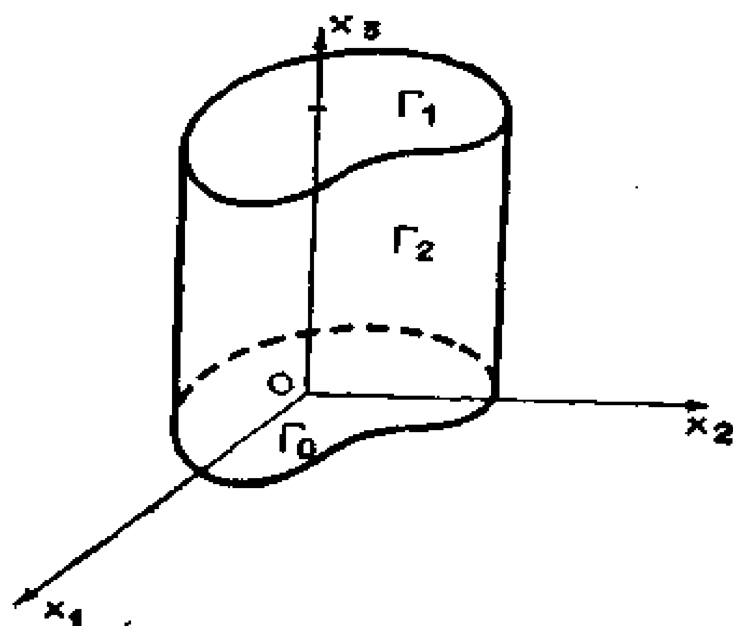


图 19

$$\begin{cases} \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上 } u_1 = u_2 = 0 \\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上 } u_1 = -\alpha h x_2,\ u_2 = \alpha h x_1). \end{cases}$$

常数 α 是单位扭转角。

还要假定材料是各向同性的，以使弹性系数 A_{ijkh} 是前面 6.5 使用过的，而塑性准则是 Von Mises (2.11) 的。

在这些条件之下

(6.30) $M = \{\tau \mid \tau \in H,\ \text{在 } \Omega \text{ 内 } \tau_{ij,j} = 0,\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上 } \tau_{ij} n_j = 0,\ \text{在 } \Gamma_0 \text{ 和 } \Gamma_1 \text{ 上 } \tau_3 = 0\}$

根据 6.3，应力场解使泛函

(6.31) $$\frac{1}{2} \mathscr{A}(\tau, \tau) - \alpha h \int_{\Gamma_1} (x_1 \tau_{23} - x_2 \tau_{13}) d\Gamma$$

取 $M \cap K$ 上的最小值。

设 $\{\sigma_{ij}\}$ 是应力场解。H. Lanchon [4] 证明了

(6.32) $$\begin{cases} \sigma_{ij} = 0,\ \text{除 } \sigma_{13} \text{ 和 } \sigma_{23} \text{ 外} \\ \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2),\ \sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2). \end{cases}$$

在这些条件下平衡方程 $\sigma_{ij,j} = 0$ 简化为

(6.33) $$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0$$

即存在[1] $\theta=\theta(x_1, x_2)$ 使

(6.34) $$\sigma_{13}=\partial\theta/\partial x_2,\quad \sigma_{23}=-\partial\theta/\partial x_1$$

Γ_2 上的方程 $\sigma_{ij}n_j=0$ 简化为

$$d\theta/ds=0$$

其中 s 是 Γ_0 上的一个曲线坐标，故在 Γ_0 的关于 R^2 的边界上 $\theta=$ 常数. 由于 (6.34) 确定 θ 到一常数，又因为 $\sigma_{i3}\in L^2(\Omega)$，故可取 $\theta\in H_0^1(\Gamma_0)$.

条件 $\{\sigma_{ij}\}\in K$ 通过 θ 可表为

(6.35) $$\theta\in K_1=\{v\,|\,v\in H_0^1(\Gamma_0),\ |\text{grad}\ v|\leqslant g\ \text{p. p. 于}\ \Gamma_0\ \text{上}\}$$

通过 (6.34) 与 $\{\sigma_{ij}\}$ 相联系的场使类似 (6.31) 的泛函

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}|\text{grad}\ v|^2dx_1dx_2+\mu\alpha\int_{\Gamma_0}(x_1\partial v/\partial x_1+x_2\partial v/\partial x_2)dx_1dx_2$$

(μ: 剪切模量)

在 K_1 上取最小值，变换第二个积分，这个泛函是

(6.36) $$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}|\text{grad}\ v|^2dx_1dx_2-2\mu\alpha\int_{\Gamma_0}v\,dx_1dx_2$$

若令

(6.37) $$a(\theta, v)=\int_{\Gamma_0}\text{grad}\ \theta\,\text{grad}\,v\,dx_1dx_2$$

(6.38) $$f=2\mu\alpha,\quad (f, v)=\int_{\Gamma_0}fv\,dx_1dx_2$$

则我们有，**通过 (6.34) 与应力解 $\{\sigma_{ij}\}$ 相联系的场 θ 使泛函**

(6.39) $$\frac{1}{2}a(v, v)-(f, v)$$

在 K_1 上取最小值.

或

场 θ 表征为

(6.40) $$\begin{cases}\theta\in K_1\\ a(\theta, v-\theta)\geqslant(f, v-\theta),\ \forall v\in K_1\end{cases}$$

---

1) 在多连通时，推理需作稍许修改；见 H. Lanchon [2].

自然，以上每种提法都蕴涵存在柱形杆的弹塑性扭转问题应力场唯一解且满足 Hencky 型特性定律. □

注 6.1 可设扭转角 α 是 t 的连续函数. 用这里叙述的方法对每一 t 值可得一解 $\mathcal{O}_{\alpha(t)}$. □

假定 $\alpha(t)$ 连续可微,$\alpha(0)=0$,并取 Prandtl Reuss 定律为特性定律,我们研究同一扭转问题. 求出通过(6.34)与应力解的场相联系的 $\tilde{\theta}(t)$ 满足

(6.41) $$\begin{cases}\tilde{\theta}(t)\in K_1\\ a(\tilde{\theta}'(t),v-\tilde{\theta}(t))\geqslant 2\mu\alpha'(t)\int_{\Gamma_0}(v-\tilde{\theta}(t))dx_1dx_2,\\ \forall v\in K_1\ \ \theta(0)=0\end{cases}$$

并且 H. Brézis 断言,若 $\alpha(t)$ 是非减函数,则

(6.42) $$\tilde{\theta}(t)=\theta_{\alpha(t)}\quad □$$

注 6.2 性质(6.42)推广到 6.2 的一般问题尚未解决.

注 6.3 知道了应力场的解

(6.43) $$\sigma_{13}=\partial\theta/\partial x_2,\ \ \sigma_{23}=-\partial\theta/\partial x_1$$

则应寻求相联系的位移场 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 为

(6.44) $$\begin{cases}u_1=\alpha x_3x_2\\ u_2=\alpha x_3x_1\\ u_3=\alpha\phi(x_1,x_2)\end{cases}$$

应变张量是

(6.45) $$\begin{cases}\varepsilon_{11}(u)=\varepsilon_{22}(u)=\varepsilon_{33}(u)=0\\ \varepsilon_{12}(u)=0,\quad \varepsilon_{13}(u)=\alpha[-x_2+\partial\phi/\partial x_1]\\ \qquad\qquad\qquad \varepsilon_{23}(u)=\alpha[x_1+\partial\phi/\partial x_2]\end{cases}$$

设材料是各向同性的,μ 表示 Lamé 常数,我们有

(6.46) $$\begin{cases}\varepsilon_{13}(u)=\dfrac{1}{2\mu}\sigma_{13}+\lambda_{13}\\ \varepsilon_{23}(u)=\dfrac{1}{2\mu}\sigma_{23}+\lambda_{23}\end{cases}$$

其中

(6.47) $$\lambda_{13}(\tau_{13}-\sigma_{13})+\lambda_{23}(\tau_{23}-\sigma_{23})\leqslant 0,$$

$$\forall \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 \leqslant g^2$$

我们要指出确定 u 的两个可能的方法，其中第一个目前还没彻底解决。

1）凸集 K_1 由 (6.35) 定义，χ_{K_1} 是其指示函数，上述特性定律还可写为

$$(6.48) \qquad (G + \chi_{K_1})(\sigma) + (G + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(u)) = (\sigma, \varepsilon)$$

其中我们令

$$(6.49) \qquad G(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \int_{\Gamma_0} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dx_1 dx_2$$

由此得位移场的解 u 使泛函

$$(6.50) \qquad (G + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(\tilde{u}))$$

取最小值，其中位移场 $\tilde{u}$ 取形式 (6.44)。

计算泛函 (6.50) 得显式

$$(G^* + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(\tilde{u})) = \int_\Omega \Phi(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}) dx_1 dx_2$$

其中

$$(6.51) \qquad \Phi(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}) = \begin{cases} \mu|\varepsilon|^2, \text{ 当 } |\varepsilon| \leqslant g/2\mu \text{ 时} \\ g|\varepsilon| - g^2/4\mu, \text{ 当 } |\varepsilon| \geqslant g/2\mu \text{ 时} \end{cases}$$

这里令

$$|\varepsilon| = (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)^{1/2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \alpha[-x_2 + \partial\phi/\partial x_1] \\ \varepsilon_{23} = \alpha[x_1 + \partial\phi/\partial x_2] \end{cases}$$

这一方法把 u 表为一变分问题的解，但并不知它是否有解，这是因为要求其最小值的泛函在属于 $H^1(\Gamma_0)$ 的函数 $\phi(x_1, x_2)$ 的集合上不是强制的。

2）再取特性定律 (6.47)，把它写成（H. Brézis [3]）

$$(6.52) \qquad \begin{cases} -x_2 + \partial\phi/x_1 = \dfrac{1}{\mu\alpha} \partial\theta/\partial x_2 + \lambda\partial\theta/\partial x_2 \\ +x_1 + \partial\phi/\partial x_2 = \dfrac{1}{-\mu\alpha} \partial\theta/\partial x_1 - \lambda\partial\theta/\partial x_1 \\ \text{其中} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{当 } |\text{grad } \theta| < g \text{ 时 } \lambda = 0 \\ \text{当 } |\text{grad } \theta| = g \text{ 时 } \lambda \geqslant 0 \end{cases}$$

函数 ψ 的存在性蕴涵 $\partial^2\psi/\partial x_1\partial x_2 = \partial^2\psi/\partial x_2\partial x_1$，由此

$$-2 = \frac{1}{\mu\alpha}\Delta\theta + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)$$

或

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \lambda\Delta\theta = -2 - \frac{1}{\mu\alpha}\Delta\theta \tag{6.53}$$

在弹性区域 ($|\text{grad } \theta| < g$)有 $\lambda = 0$（因为这时右端为零，故 $\lambda = 0$ 是解）。在塑性区域 ($|\text{grad}\theta| = g$) $\theta(x_1, x_2) = g\text{dist}(\{x_1x_2\}, \partial\Gamma_0)$，故方程 (6.53) 变成关于 $\partial\Gamma_0$ 的点的法向的一个微分方程

$$-g\partial\lambda/\partial n + \lambda\Delta\theta = -2 - \Delta\theta/\mu\alpha \tag{6.54}$$

考虑到在弹性区域 $\lambda = 0$，可用显式计算 $\lambda(x_1, x_2)$。在塑性区域的条件 $\lambda(x_1, x_2) \geqslant 0$ 可由在该区域的条件 $\Delta\theta + 2\mu\alpha \geqslant 0$ 导出，于是在扭转的特殊情形找到与应力场的解相联系的位移场。

7. 闭锁材料 (Locking material)

7.1 特性定律

"闭锁材料"的类型由 W. Prager [3] 引进，他以图示法给出了其特性定律。直观的说，这种材料在形变未达某一界限时具有线性弹性特性。当这一界限达到时，应力可以增加但不再引起更大的形变。

我们可更确切地叙述这一定律：设 $f(\varepsilon_{ij})$ 是应变张量 ε 的连续凸函数，$f(0) < 0$。可能应变的区域定义为

$$f(\varepsilon) \leqslant 0 \tag{7.1}$$

而特性定律为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) + \mu_{ij} \\ \mu_{ij}(e_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) \leqslant 0, \ \forall e = \{e_{ij}\}, \ f(e) \leqslant 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

这定律在实际上只适用于某些静态或拟静态情况。

如常，弹性系数 a_{ijkh} 满足

(7.3) $$\begin{cases} a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \\ a_{ijkh}e_{ij}e_{kh} \geqslant \alpha e_{ij}e_{ij}, \quad \alpha \text{是} > 0 \text{的常数} \end{cases}$$ □

界限定律的例子

用 e_I, $I = 1, 2, 3$ 表示张量 $\{e_{ij}\}$ 的固有值，a 是一个给定的正数，定义

$$f(e) = -(\operatorname*{Inf}_{I=1,2,3} e_I + a)$$

即有 $f(e) \leqslant 0$ 当且仅当 $e_I \geqslant -a$, $\forall I = 1, 2, 3$.

我们来验证

(7.4) 使 $f(e) \leqslant 0$ 的 $e \in \mathbf{R}^6$ 的集合是凸的

事实上，设 n 是单位向量，而 E 是分量为 $E_i = e_{ij}n_j$ 的向量，令 $E(n) = e_{ij}n_in_j$。例如，在 $\{e_{ij}\}$ 的主轴中易于验证，$f(e) \leqslant 0$ 等价于

$$\operatorname*{Inf}_{|n|=1} E(n) \geqslant -a$$

由于 $E(n)$ 关于 $\{e_{ij}\}$ 是线性的故得所欲证。 □

仿完全塑性的情形，这一特性定律可以写成积分形式。引入 Hilbert 空间 H

$$H = \{e \mid e = \{e_{ij}\},\ e_{ij} \in L^2(\Omega),\ e_{ij} = e_{ji}\}$$

赋以内积

(7.5) $$(\varphi, \phi) = \int_\Omega \varphi_{ij}\phi_{ij}dx$$

其中 Ω 表示 $\mathbf{R}^3$ 中材料占据的具有规则边界 Γ 的有界开集.

用 K 表示 H 的凸集，定义为

(7.6) $$K = \{e \mid e \in H,\ f(e) \leqslant 0 \text{ p.p. 于 } \Omega\}$$

条件 (7.2) 等价于

(7.7) $$\begin{cases} \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) + \mu_{ij} \\ \int_\Omega \mu_{ij}(e_{ij} - \varepsilon_{ij}(u))dx \leqslant 0, \quad \forall e \in K \end{cases}$$

且

(7.8) $$\varepsilon(u) \in K,\quad \mu_{ij} \in L^2(\Omega)$$

(事实上，(7.2) 推出 (7.7)，而用 2.1.2 中的论证可证明由 (7.7) 和 (7.8) 推出 (7.2)． □

7.2 待考虑的问题

按照 W. Prager 的工作，我们要研究在上述特性定律下的物体形变的稳定问题，该物体承受分量为 f_i 的力的体密度 f 和 Γ_F 上分量为 F_i 的力的面密度 $F(x)$，在 Γ_U 上还有分量为 $U_i(x)$ 的位移 $U(x)$。区域 Γ_U 和 Γ_F 组成 Γ 的一个分解.

位移场 $u=\{u_i\}$ 和应力场 $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$ 的解应满足

$$(7.9)\qquad \begin{cases} \sigma_{ij,j}+f_i=0, & \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{ij}n_j=F_i, & \Gamma_F \text{上} \\ u_i=U_i, & \Gamma_U \text{上} \end{cases}$$

和特性定律 (7.7)，(7.8)． □

7.3 问题的二重变分提法

特性定律 (7.7) 还可写成

$$(7.10)\qquad \int_\Omega \mu_{ij}\varepsilon_{ij}(u)dx=\operatorname*{Sup}_{e\in K}\int_\Omega \mu_{ij}e_{ij}dx=\psi_K^*(\mu)$$

其中 ψ_K 是凸集 $K\subset H$ 的指示函数，而 ψ_K^* 是 ψ_K 的共轭函数(见 6.3 中的定义)．

定理 7.1 特性定律 (7.7)，(7.8) 等价于

$$(7.11)\qquad (g+\psi_K)(\varepsilon(u))+(g+\psi_K)^*(\sigma)=(\varepsilon,\sigma)$$

其中

$$(7.12)\qquad g(e)=\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijkh}e_{ij}e_{kh}dx$$

ψ_k 表凸集 $K\subset H$ 的指示函数，ψ_K^* 表示其共轭函数.

证明

i) (7.7)，(7.8) → (7.11)．我们来计算 (7.11) 的左端，对 $\varepsilon(u)\in K$，

$$g(\varepsilon)+\sup_{e\in K}\int_\Omega\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}e_{ij}e_{kh}\right)dx$$

$$= \sup_{e\in K}\int_\Omega\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}e_{ij}e_{kh}+\frac{1}{2}a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\right)dx$$

$$= \sup_{e\in K}\int_\Omega\Big[e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}(e_{ij}-\varepsilon_{ij})(e_{kh}-\varepsilon_{kh})$$

$$+a_{ijkh}\varepsilon_{ij}(\varepsilon_{kh}-e_{kh})\Big]dx\leqslant\sup_{e\in K}\int_\Omega[e_{ij}(\sigma_{ij}$$

$$-a_{ijkh}\varepsilon_{kh})+a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}]dx=\sup_{e\in K}\int_\Omega(e_{ij}\mu_{ij}$$

$$+a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh})dx=\int_\Omega(\varepsilon_{ij}\mu_{ij}+a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh})dx=(\sigma,\varepsilon)$$

于是

$$(g+\phi_K)(\varepsilon)+(g+\phi_K)^*(\sigma)\leqslant(\sigma,\varepsilon) \tag{7.13}$$

由共轭函数的定义

$$(g+\phi_K)(\varepsilon)+(g+\phi_K)^*(\sigma)\geqslant(\sigma,\varepsilon) \tag{7.14}$$

即可推出 (7.11).

ii) (7.11) ⇒ (7.7), (7.8).

等式 (7.11) 蕴含 $\varepsilon(u)\in K$, 于是有

$$g(\varepsilon)+\sup_{e\in K}\int_\Omega\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}e_{ij}e_{kh}\right)dx=(\varepsilon,\sigma)$$

重新组合得

$$(\varepsilon,\sigma)=\sup_{e\in K}\int_\Omega\Big[e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}(\varepsilon_{ij}-e_{ij})(\varepsilon_{kh}-e_{kh})-a_{ij}\varepsilon_{kh}(e_{ij}-\varepsilon_{ij})\Big]dx \tag{7.15}$$

由 (7.7) 引入 μ, 则 (7.15) 可写为

$$\sup_{e\in K}\int_\Omega\Big[e_{ij}\mu_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}(e_{ij}-\varepsilon_{ij})(e_{kh}-\varepsilon_{kh})\Big]dx=\int_\Omega\varepsilon_{ij}\mu_{ij}dx \tag{7.16}$$

设 e 是 K 的任一元, 根据 (7.16)

$$\int_\Omega\Big[(e_{ij}-\varepsilon_{ij})\mu_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkh}(e_{ij}-\varepsilon_{ij})(e_{kh}-\varepsilon_{kh})dx\leqslant 0 \tag{7.17}$$

对于由

$$(7.18)\qquad e^{(\alpha)}=\alpha e+(1-\alpha)\varepsilon,\quad \alpha\in]0,1[$$

定义的 $e^{(\alpha)}$ 应用(7.17),除以 α 即得

$$(7.19)\qquad \int_\Omega (e_{ij}-\varepsilon_{ij})\mu_{ij}dx-\alpha\int_\Omega g(e-\varepsilon)dx\leqslant 0$$

令 α 趋于零,即得不等式(7.7). □

推论: 变分提法. 设 e 和 τ 是H的任意两个元素,则有

$$(g+\phi_k)(e)+(g+\phi_k^*)(\tau)\geqslant(e,\tau)$$

因此问题可能的解 $\{u_i,\sigma_{ij}\}$ 使泛函

$$(7.20)\qquad (g+\phi_k)(e)+(g+\phi_k^*)-(e,\tau)$$

取最小值,这里应力场 τ 是静力学上允许的,即

$$(7.21)\qquad \begin{cases}\tau\in H\\ \tau_{ij,j}+f_i=0,\ \Omega\text{ 内}\\ \tau_{ij}n_j=F_i,\ \Gamma_F\text{ 上}\end{cases}$$

而应变场 e 是运动学上允许的,即

$$(7.22)\qquad \begin{cases}e=\varepsilon(v),\\ v=\{v_i\},\ v_i\in H'(\Omega)\\ v=U_i\ (\Gamma_U\text{上})^{1)}\end{cases}$$

于是我们有

$$(7.23)\quad (e,\tau)=\int_\Omega f_iv_idx+\int_{\Gamma_F}F_iv_id\Gamma+\int_{\Gamma_U}u_i\tau_{ij}n_jd\Gamma$$

而求由(7.20)定义的泛函的最小值问题等价于分别求在运动学允许场的集合上求泛函

$$(7.24)\quad I_1(v)=(g+\phi_K)(\varepsilon(v))-\int_\Omega f_iv_id\Gamma-\int_{\Gamma_F}F_iv_id\Gamma$$

的最小值和在静力学允许场的集合上求泛函

$$I_2(\tau)=(g+\phi_K)^*(\tau)-\int_{\Gamma_U}u_i\tau_{ij}n_jd\Gamma$$

的最小值.

1) 象多次所做的,假定 $f_i\in L^2(\Omega)$, $F_i\in H^{-1/2}(\Gamma_F)$, $u_i\in H^{1/2}(\Gamma_U)$ (即 $H^{1/2}(\Gamma)$ 中一个元素在 Γ_U 上的限制).

7.4 位移场解的存在性和唯一性

(7.24) 中定义的泛函 $I_1(v)$ 在运动学允许场的集合上严格凸且下半连续，只要 $\mathrm{Mes}\Gamma_U > 0$，我们正是这样假定. 并且当 v 在 $(H^1(\Omega))^3$中的范数趋于$+\infty$时这个泛函趋于$+\infty$.

(在 $\Gamma_U = \varnothing$ 时，必须 f 和 F 的集合组成一等价于零的转矩. 这时，泛函 $I_1(v)$ 定义在商空间 $(H^1(\Omega))^3/\mathscr{R}$ 上，$\mathscr{R}$是 $\mathbb{R}^3$ 中刚体位移集. 在这商空间上，泛函 $I_1(v)$ 具有上述性质，在第三章第 3 节如此考虑过.)由此推出

定理 7.2 若 Γ_U 有正测度，则存在唯一的运动学允许位移场，它使泛函 $I_1(v)$ 取最小值.

若 Γ_U 是空集，且作用力组成一个等价于零的转矩，则存在 $(H^1(\Omega))^3$中的元素，在运动学允许场中，它使泛函 $I_1(v)$取最小值，这个元素在允许相差一刚体位移的意义下是唯一的.

7.5 相关的应力场

利用第 6 节中的对偶性结果，有

定理 7.3 若存在应力场 σ，它在由 (7.21) 定义的静力学允许场中使泛函 $I_2(\tau)$ 取最小值，则 σ 和 $\varepsilon(u)$ 满足特性定律(7.11).

注 7.11 就我们所知，应力场 σ 的存在问题尚未解决. 这里的情况类似于第 6 节，只是交换了应力和应变的地位. □

8. 评　述

有关塑性的经典著作可参考 W. I. Koiter [1], J. Mandel [1], [2], W. Prager [1],[2], W. Prager 和 P. G. Hodge [1] 和这些著作的文献.

在我们的叙述中，各种塑性特性定律——除去没有涉及到的带强化的塑性——都看作弹-粘-塑性的特殊情形和极限情形.

本章涉及的是小变形问题，空间变量是 Lagrange 变量. 在

第六章将研究流动问题，空间变量是 Euler 变量。（对这两类变量的介绍，可参见 P. Germain [1] 第三章。）

在 3，4 两节，结果是在凸集 K 不依赖于时间的假设之下获得的。这条件在一些重要的特殊情形例如柱形杆的扭转情形成立（H. Lanchon [1]—[4]，W. Ting [1]，[2]，B.D. Annin [1]）。但凸集依赖于时间的情形经常出现，但这个问题尚未解决 。本章包含其它未解决的重要问题，例如第 6 节求位移场的解或第 7 节求应力场的解的问题。 □

我们没有涉及带大应变的塑性问题；对于相应方程的建立可参考 M. M. Balaban, A. E. Green, P. M. Naghdi [1]。

第六章　Bingham 刚性粘-塑性流体

本章假定读者熟悉第一章 1 至 3 节的内容。

1. 引言和待考虑的问题

刚性粘-塑性流体是一种连续介质，它服从第一章第 1 节所述的一般守恒定律和特殊的特性定律.

我们要确定对应的方程组和所研究的问题类型.

1.1 刚性粘-塑性流体的特性定律，不可压缩性

物理上的不可压缩性假设可表为

(1.1)
$$\mathrm{Div}\, v = 0$$

这里 v 是速度向量场. 利用质量守恒方程（第一章 1.3）可推出

(1.2)
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i = 0$$

因此，一流体质点的密度在流动过程中保持为常量；于是若假定在一特定时刻该密度不依赖空间变量，则它在每一时刻都如此. 在这些条件之下，我们有

(1.3)
$$\rho = 常数 = \rho_0$$

以后总设 $\rho_0 = 1$，这相当于适当选取密度单位.

ρ 的固定决定了问题的一个未知函数. 并且它分开了能量方程和动量守恒方程，只要表达应力张量的特性定律不涉及温度；这里我们就这样假定. 本章不讨论热现象（温度场，热流），而仅研究流动性质（速度和应力场）.

1.2 散逸函数

在第一章方程(1.27)中 $\sigma_{ij}D_{ij}$[1] 有时称为散逸函数 $\mathscr{D}$. 由实验结果引入的这函数可用来表达材料的特性定律. 我们要求$\mathscr{D}$只依赖于应变率张量 (P. Germain [2], W. Prager [1]),
设

(1.4) $$\sigma_{ij}D_{ij}=\mathscr{D}_1(\mathrm{D})+\mathscr{D}_2(\mathrm{D})$$

其中 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 分别是张量 D 的分量的 1 和 2 阶正齐次函数. 由此得

(1.5) $$\begin{cases}\mathscr{D}_1=\dfrac{\partial\mathscr{D}_1}{\partial D_{kl}}D_{kl}\\[2ex] \mathscr{D}_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathscr{D}_2}{D_{kl}}D_{kl}\end{cases}$$

对于任意的服从约束

(1.6) $$D_{kk}=0 \qquad ((1.1)\text{的另一形式})$$

的分量 D_{ij} (1.4) 应成立. 应力张量的分量 σ_{ij} 为

(1.7) $$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\partial\mathscr{D}_1/\partial D_{ij}+\frac{1}{2}\mathscr{D}_2/\partial D_{ij}$$

其中 p 是一不依赖于 D_{ij} 的数. 若假设流体各向同性, 则数量 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 只是张量 D 的不变量的函数.

若材料的函数 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 由

(1.8) $$\mathscr{D}_1=2g(D_{II})^{1/2},\quad \mathscr{D}_2=4\mu D_{II}$$

给定,则称之为 Bingham 流体 (W. Prager [1]),其中 D_{II}

(1.9) $$D_{II}=\frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}$$

是张量 D 的不变量. 正数 g 和 μ 分别是 Bingham 流体的屈服极限和粘性系数.

特性定律为

(1.10) $$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+gD_{ij}/(D_{II})^{1/2}+2\mu D_{ij}$$

---

1) D_{ij} 在第一章由(1.23)定义.

此式仅当 $D_{II} \neq 0$ 时才有意义。

若 $D_{II} = 0$，则应力张量不确定。在 (1.10) 中，数量 $-p$ 表示应力张量的球面部分[1]；可以把 p 理解为压强。 □

为逆转关系 (1.10)，令

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D D_{ij}^D \tag{1.11}$$

其中 σ_{ij}^D 代表应力偏量的分量。与 (1.10) 一起我们有

$$\sigma_{II} = (g + 2\mu D_{II}^{1/2})^2 \tag{1.12}$$

这蕴涵 $\sigma_{II}^{1/2} \geq g$，这时，(1.10) 逆转为

$$D_{ij} = \frac{1}{2\mu}(1 - g/\sigma_{II}^{1/2})\sigma_{ij}^D \tag{1.13}$$

回到 $D_{II} = 0$ 的情形，这时应力不确定，但 $\sigma_{II}^{1/2} \leq g$，因否则，(1.13) 给出的张量 $\mathbf{D}$ 适合 $D_{II} > 0$。

总之，Bingham 流体的特性定律是

$$\begin{cases} \sigma_{II}^{1/2} < g \Longleftrightarrow D_{ij} = 0 \\ \sigma_{II}^{1/2} \geq g \Longleftrightarrow D_{ij} = \dfrac{1}{2\mu}(1 - g/\sigma_{II}^{1/2})\sigma_{ij}^D \end{cases} \tag{1.14}$$ □

注 1.1 若 (1.10) 中的 $g = 0$，就又得到经典不可压缩粘性流体的特性定律 (Newton 流体)。于是对小的 g，可把 Bingham 流体视为与经典粘性流体相近的模型[2]。由 (1.14) 显见，Bingham 流体的补充的特点是：当应力的某一函数——这里是 $\sigma_{II}^{1/2}$，没有达到某一界限 g 时，它如刚体一样移动。 □

这种特性体现在石油开采和混凝土技术中的某些原油和水泥中。

若 g 严格正，则在流动内部出现刚性区域。

若 g 增加，则这些刚性区域扩大且当 g 充分大时可能完全堵塞流动。 □

---

1) 给定一个分量为 T_{ij} 的二阶张量，再回忆一次球面部分和偏量的分解

$$T_{ij} = s\delta_{ij} + T_{ij}^D, \text{ 其中 } s = \frac{1}{3}T_{kk}, \ TD_{kk} = 0.$$

2) 在第 5 节明确这一点。

注 1.2 若在 (1.10) 中令 $\mu=0$,(1.14) 不再成立;确切地说,(1.14) 中的第一个成立,而第二个是

$$\sigma_{ij}^{D}=gD_{ij}/D_{II}^{1/2}$$

的逆转,它表示 $\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{D}\sigma_{ij}^{D}=g^{2}$,于是张量 D_{ij} 与张量 σ_{ij}^{D} 成比例;故 (1.14) 应代以

(1.15)
$$\begin{cases}\sigma_{II}<g^{2}\Longleftrightarrow D_{ij}=0\\ \sigma_{II}=g^{2}\Longrightarrow\exists\lambda>0\text{使}D_{ij}=\lambda\sigma_{ij}^{D}\end{cases}$$

遵从这类特性定律的材料称为"刚性完全塑性"的,或"带 Von Mises 塑性势"的. 我们看到,R^6 中表示应力张量的偏量的点保持在球

(1.16)
$$\sigma_{II}\leqslant g^{2}$$

的内部或边界上. 若该点在内部,则材料处在刚性状态;若在边界上,则材料可经受一塑性形变. □

1.3 待考虑的问题和方程一览

我们将考虑三种类型的问题: 在 R^3 中一有界开集内部的流动;在 R^3 的一有界开集外部的流动,其在无穷远处的均匀速度是给定的;在无穷长柱形导管内部的层状流动.

1) 内部问题. 设 Ω 是 R^3 的一边界为 Γ 的开集. 我们求在 Ω 内部的 Bingham 流体的流动的速度场 $v(x,t)$ 和压强场 $p(x,t)$.

方程和边条件如下,

(1.17) $\gamma_i=\sigma_{ij,j}+f_i$ Ω 内, $i=1,2,3$,(运动方程)

其中

(1.18)
$$\gamma_i=\partial v_i/\partial t+v_{i,j}v_j$$

(1.19)
$$v_{i,i}=0\ (\text{不可压缩性})$$

f_i 是给定力的体密度 $f(x,t)$ 的分量.

应力张量的分量 σ_{ij} 由在 1.2 段阐明的 Bingham 流体的特性定律与 D_{ij} 相联系.

仿经典粘性流体,边条件是在壁上的附加条件,即

(1.20) $$v_i = 0 \quad \Gamma \text{ 上}$$

这问题可分为稳定和非稳定两种情形：第一种情形，未知函数 v_i 和 p 不依赖于时间，在第二种情形，有初条件

(1.21) $$v_i|_{t=0} = v_{0i}$$

这里 v_{0i} 是给定的满足 (1.19) 和(120) 的 x_i 的函数。

2) 外部问题. 这是 Bingham 流体在一固定刚体周围的流动问题，它在无穷远处的速度是给定的常量.

刚体占据 $\mathbf{R}^3$的一边界光滑的区域 $\bar{\Omega}$. 速度场和压强场在 $\mathbf{R}^3 - \bar{\Omega} = \Omega$ 中满足方程 (1.17), (1.18), (1.19), (1.20), 还要附加在无穷远的条件

(1.22) $$\lim_{|x|\to\infty} v(x, t) = (U_1, 0, 0)$$

这里 U_1 是一给定的正常数，还要附加 (1.21) 型的初条件.

3) 在一个管中的流动. 对这问题，Mosolov 和 Miasnikov [1] 用与此略微不同的方法研究过.

这里涉及的是 Bingham 流体在压强下降影响下在一柱形管中的稳定和层状[1]流动. □

管的母线在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中平行于 Ox_3轴. (见图 20)

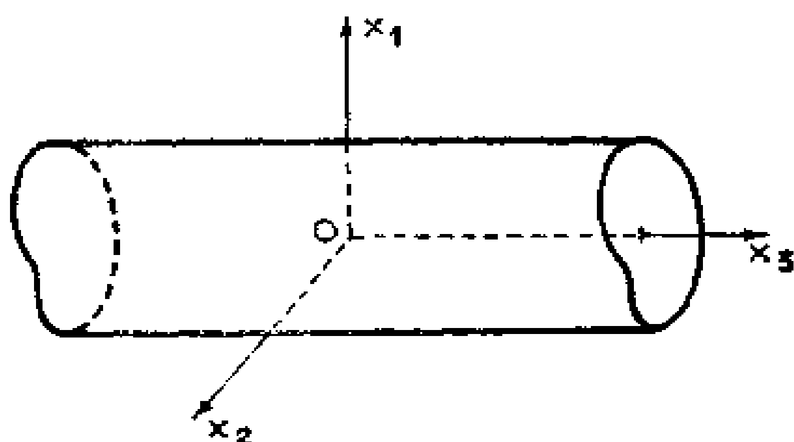


图 20

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中该柱形的横截面的区域. 所研究的流动界于截

1) 这意味速度平行于柱的母线.

面

(1.23) $$x_3 = 0 \text{ 和 } x_3 = L \quad (L \text{ 为给定的长度})$$

之间，在这两个截面上给定了压强

(1.24) $$p(x_3)|_{x_3=0} = 0, \quad p(x_3)|_{x_3=L} = -cL$$

$c > 0$ 是单位长上的压强降落。 □

若求速度场和压强场满足 (1.17), (1.18), (1.19) 与 Bingham 流体的特性定律，附加条件

(1.25) $$\text{在 } \partial\Omega \times [0, L] \text{ 上 } v = 0$$

和 (1.24)，则我们得到一般说是不适定的问题[1].

我们限定允许解的类，以使流动是层状的。

这性质在实验上总是满足的，只要压强降落 "c" 不太大，换句话说，流动的 Reynolds 数[2]不太大。

在这些条件之下，速度场是 $(0, 0, v)$，方程 (1.19) 要求 v 只依赖于 x_1 和 x_2. 应变率张量 $\mathbf{D}$ 写成：

(1.26) $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial v/\partial x_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial v/\partial x_2 \\ \frac{1}{2}\partial v/\partial x_1 & \frac{1}{2}\partial v/\partial x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

应力的偏量只依赖于 x_1 和 x_2，它形如

(1.27) $$\sigma + pI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}^D \\ 0 & 0 & \sigma_{23}^D \\ \sigma_{13}^D & \sigma_{23}^D & 0 \end{pmatrix}$$

于是运动方程 (1.17) 给出

---

1) 其理由可从以下要研究的限定问题是适定的这点看出，但这不是证明。

2) 称数 $\mathscr{R} = Ul\rho/\mu$ 为粘性流体流动的 Reynolds 数，其中

U: 流动的特征速度，

l: 流动的特征长度，

ρ: 流体的质量密度，

μ: 流体的粘性系数。

$$
(1.28)\qquad
\begin{cases}
\partial p/\partial x_1 = 0\\
\partial p/\partial x_2 = 0\\
\partial p/\partial x_3 = \sigma^D_{31,1} + \sigma^D_{32,2} \quad (f = 0)
\end{cases}
$$

在(1.28)的第三个方程中，左端只依赖于 x_3，而右端只依赖于 x_1 和 x_2。于是两端全等于单位长度压强降落 c 的异号数，由此

$$
(1.29)\qquad p = -cx_3
$$

总之，问题归纳为寻求 Ω 内的函数 $v(x_1, x_2)$，它满足

$$
(1.30)\qquad \sigma^D_{31,1} + \sigma^D_{32,2} + c = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内}
$$

$$
(1.31)\qquad \sigma^D_{3i} = gD_{3i}/D_{11}^{1/2} + 2\mu D_{3i},\ i = 1, 2 \text{ 只要 } D_{11} \neq 0,
$$

$$
(D_{11} = (D_{31})^2 + (D_{32})^2)
$$

和边条件

$$
(1.32)\qquad \text{在 } \Gamma(=\partial\Omega) \text{ 上 } v = 0 \quad \square
$$

注 1.3 我们曾在(1.28)中令 $f = 0$，而这给出有趣的简化。

若解存在，则它也允许解稍许一般的问题，这就特别包括了重力的体密度的情形。设

$$
(1.33)\qquad f = -\mathrm{grad}\Phi
$$

$$
(1.34)\qquad \Phi = \varphi(x_3) + \psi(x_1, x_2)
$$

若令

$$
(1.35)\qquad \tilde{p} = p + \Phi
$$

这个量应当满足(1.28)，其中 p 代以 $\tilde{p}$，这就要求

$$
\tilde{p} = p + \Phi = C_1x_3 + C_2
$$

这里 C_1 和 C_2 是常数。应区分两种情形：

i) $\psi \equiv 0$：取

$$
p(x_3) = -Cx_3 + x_3L^{-1}[\varphi(L) - \varphi(0)] - [\varphi(x_3) - \varphi(0)]
$$

条件(1.24)可以满足。

ii) $\psi \not\equiv 0$：条件(1.24)不能再由一层状流动所满足。并且这不再是“自然”的条件：这时应简单地要求

$$
(1.36)\qquad p(x_1^0, x_2^0, 0) = 0,\ p(x_1^L, x_2^L, L) = -cL.
$$

其中

$$
(x_1^0, x_2^0) \in \Omega,\ (x_1^L, x_2^L) \in \Omega
$$

取

$$(1.37)\quad p(x_1, x_2, x_3) = C_1x_3 + C_2 - \varphi(x_3) - \phi(x_1, x_2)$$

则得关于 p 的解，其中常数 C_1 和 C_2 如下给定

$$(1.38)\quad \begin{cases} C_1 = -c + \dfrac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L} + \dfrac{\phi(x_1^L, x_2^L) - \phi(x_1^0, x_2^0)}{L} \\ C_2 = \varphi(0) + \phi(x_1^0, x_2^0) \end{cases}$$

2. 容器内部的流动．问题的变分不等方程形式的提法

现在要形式地得到与前节 1.2 中问题"等价"的变分不等方程．这个变分不等方程——取作问题的确切提法——随后在第 3—6 节研究．

2.1 基本记号

用 $u(x,t)$（在稳定情形用 $u(x)$）表示问题 1 的解向量场．

对任意向量场 v，令

$$(2.1)\qquad D_{II}(v) = \frac{1}{2} D_{ij}(v)D_{ij}(v)$$

$$(2.2)\qquad j(v) = 2\int_\Omega (D_{II}(v))^{1/2}dx$$

若 w 是另一向量场，则令

$$(2.3)\qquad a(v, w) = 2\int_\Omega D_{ij}(v)D_{ij}(w)dx$$

与速度场 v 伴随的加速度 $\gamma = \gamma(v)$ 是分量为 $\gamma_i = \gamma_i(v)$ 的向量场：

$$(2.4)\qquad \gamma_i(v) = dv_i/dt = \partial v_i/\partial t + v_jv_{i,j}$$

2.2 变分不等方程

我们要证明

定理 2.1. 若 $u = u(x, t)$ 是问题 1 的（正则）解，则

$$(2.5)\qquad \text{Div}\, u = 0,\ \forall t \in]0, T[$$

(2.6) $$\text{在 } \Gamma\times]0,T[\text{ 上 } u=0$$

(2.7) $$\mu a(u(t), v-u(t)) + gj(v) - gj(u(t)) \geqslant \int_{\Omega} (f-\gamma)(v-u(t))dx$$

其中 v 是向量，满足

(2.8) $$\operatorname{Div} v = 0, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } v=0$$

此外显然还有初条件（见(1.21)）。

(2.9) $$u(0) = u^0$$

注 2.1 当然，对稳定情形，只需在 (2.7) 中令

$$\text{“}\partial u_i/\partial t = 0\text{”} \ \square$$

定理 2.1 的证明．只需证明不等方程 (2.7) 成立．

设 $\sigma_{ij}(u)$ 是由特性定律 (1.10) 与速度场 u 伴随的应力场张量的分量．若 v 是一适合 (2.8) 的“检验”速度场，则我们有

(2.10) $$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) D_{ij}(v-u)dx = \int_{\Omega} (f-\gamma)(v-u(t))dx$$

（其中 $u=u(t)$）．利用 (1.10) 展开左端得其值为

(2.11) $$g\int_{\Omega} D_{II}(u)^{-1/2} D_{ij}(u)(D_{ij}(v-u))dx + \mu a(u, v-u)$$

对上式的第一项利用不等式

(2.12) $$D_{ij}(u)D_{ij}(v) \leqslant 2D_{II}(u)^{1/2}D_{II}(v)^{1/2}$$

得知，它不超过

$$2g\int_{\Omega} (D_{II}(v)^{1/2} - D_{II}(u)^{1/2})dx = gj(v) - gj(u)$$

于是 (2.10) 蕴涵 (2.7)． $\square$

现在纯粹形式地验证，若 u 是 (2.5) (2.6)，(2.7)，(2.9) 的解，则 u 是问题 1 的解．

注 2.2 这个验证只是形式的，问题 1 用“常用”术语的提法不是十分精确的． $\square$

若函数 $u=u(t)$ 是 (2.7) 的一个解，使泛函 $v\to j(v)$ 在 u 可导，即若

(2.13) $$D_{II}(u) \neq 0, \text{ p.p. 在 } \Omega \text{ 内}$$

则 (2.7) 等价于

$$\mu a(u(t),v)+g(j'(u(t)),v)=(f-\gamma,v)^{1)} \tag{2.14}$$

其中

$$(j'(u),v)=\frac{d}{d\lambda}j(u+\lambda v)|_{\lambda=0} \tag{2.15}$$

$$=\int_\Omega D_{II}(u)^{-1/2}D_{ij}(u)D_{ij}(v)dx$$

事实上，在 (2.7) 以 $u(t)+\lambda v\ (\lambda>0)$ 代 v 即得

$$\mu a(u(t),v)+g\lambda^{-1}[j(u(t)+\lambda v)-j(u(t))]\geqslant(f-\gamma,v)$$

令 $\lambda\to 0$，则

$$\mu a(u(t),v)+g(j'(u),v)\geqslant(f-\gamma,v)$$

由此以 $-v$ 代 v，即得 (2.14)。

但 (2.14) 等价于对任意满足 $\mathrm{Div}v=0$ 的 $v=\{v_i\}$ 有

$$-\int_\Omega 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij}(u)v_idx-\int_\Omega g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(D_{II}(u)^{-1/2}D_{ij}(u))\right) \tag{2.16}$$

$$\cdot v_idx=\int_\Omega(f_i-\gamma_i)v_idx$$

而若 $F=\{F_i\}$ 是一正交于零散度向量的向量：

$$\int_\Omega F_iv_i=0$$

则存在 p（在允许相差一常数的意义下唯一确定）使

$$F=\mathrm{grad}p\quad(F_i=\partial p/\partial x_i) \tag{2.17}$$

因此 (2.16) 等价于

$$-2\mu(D_{ij})_{,j}-g(D_{II}(u)^{-1/2}D_{ij}(u))_{,j}=f_i-\gamma_i-p_{,i} \tag{2.18}$$

这就回到了 (1.17)，其中 σ_{ij} 代以 (1.10)。

由于这个注解，现在可以合理地[2]把变分不等方程 (2.7)（连同条件 (2.5)，(2.6)，(2.7)）的求解作为问题 1[3] 的定义。

---

1) 其中 $(f,\varphi)=\int_\Omega f_i\varphi_idx$。

2) 我们强调指出下列事实：这一问题（在我们所知的范围内）没有其它精确提法，且从未说清楚求解的泛函空间；又见下面的注 2.3。

3) 这将由存在唯一性定理（下面的第 3 节）验证这点，特别是在二维情形。

注 2.3 正如变分不等方程问题中多次看到的，提法（2.7）"必然"涉及"自由边界"，这里是分离由（2.18）制约的流动的区域和流体处于刚性介质状态区域的边界。

未解决的问题：关于自由边界的性质尚未取得任何结果。

3. 刻画一个容器中的 Bingham 流体特征的变分不等方程的求解

3.1 泛函分析工具

设有一容器 Ω；Ω 是 $\mathbf{R}^n$[1] 中的一有界开集，其边界"充分正则"。

在第一章第 3 节中曾定义了相应整数 $s \geqslant 0$ 的空间 $H^s(\Omega)$ 和相应于任意实数 s 的空间 $H^s(\mathbf{R}^n)$。

对任一实数 $s \geqslant 0$，定义

(3.1) $H^s(\Omega) = H^s(\mathbf{R}^n)$ 的元素在 Ω 上的限制。更精确地说，设有从 $H^s(\mathbf{R}^n) \to L^2(\Omega)$ 的（比如说）映射

$$f \to \pi f = f \text{ 在 } \Omega \text{ 上的限制}$$

定义 $H^s(\Omega)$ 为 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 在映映 π 下的象并赋 $H^s(\Omega)$ 以 Hilbert 范数

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \operatorname*{Inf}_{\substack{f \in H^s(\mathbf{R}^n) \\ \pi f = \varphi}} \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}$$

当 s 为整数时，这定义符合通常的定义（范数等价）[2]。以 $(\varphi, \psi)_{H^s(\Omega)}$ 表 $H^s(\Omega)$ 中的内积。

然后引进

$$\mathscr{V} = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathscr{D}(\Omega))^n, \ \mathrm{Div}\varphi = 0\} \tag{3.2}$$

$$V_s = \mathscr{V} \text{ 在 } (H^s(\Omega))^n \text{ 中的闭包} \tag{3.3}$$

V_s 对于范数

---

1) 自然应用中为 $n = 2$ 或 3。

2) 例如见 Lions-Magenes ［1］ 第 1 卷第 1 章。

$$\|v\|_s = ((v, v))_s^{1/2} \tag{3.4}$$

是一 Hilbert 空间。这里

$$((v, w))_s = (v_i, w_i)_{H^s(\Omega)} \tag{3.5}$$

令

$$V_1 = V, \quad \|v\|_1 = \|v\| \tag{3.6}$$

$$V_0 = H, \quad \|v\|_0 = |v|, \quad ((v, w))_0 = (v, w) \tag{3.7}$$

引理 3.1 若 $s = n/2$，则

$$\forall v \in V_s, \quad v_{i,j} \in L^n(\Omega) \tag{3.8}$$

证明。若 $v \in V_s$，则 $v_{v,j} \in H^{s-1}(\Omega)$。一般（J. Peetre [1]），若 $\varphi \in H^r(\Omega)$，则 $\varphi \in L^p(\Omega)$，$1/p = 1/2 - r/n$（若 $1/2 - r/n > 0$），由此得 (3.8)。 □

对 Ω 上的向量场 (u, v, w) 令（在有意义时）

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i v_{j,i} w_j dx \tag{3.9}$$

为简化，记

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))^n} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}$$

对 (3.9) 用 Hölder 不等式给出

$$\begin{cases} |b(u, v, w)| \leqslant c_1 \|u\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^p(\Omega)} \sum_{i,j} \|D_i v_j\|_{L^n(\Omega)} \\ \dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{n} = 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

由引理 3.1 推出

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_s, \quad s = n/2 \quad □ \tag{3.11}$$

此外，我们有凸性不等式[1)]

---

1) 内插理论（见 Lions-Magenes [1]）指出

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leqslant c \|v\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} |v|^{1/2}_{L^2(\Omega)}$$

J. Peetre 的结果（引理 3.1 中已用过）指出

$$H^{1/2}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

由此即得 (3.12)。

$$
(3.12)\qquad \begin{cases} \|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c_1 \|v\|^{1/2}_{H^1_0(\Omega)} \|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H^1_0(\Omega) \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} \end{cases}
$$

注 3.1 当 $n = 2$ 时，(3.12) 的初等证明是容易的，这时 $p = 4$. 只需对 $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ 证明 (3.12)，在 Ω 外延拓 v 为 0，只需对 $v \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$ 证明 (3.12). 而

$$
v^2(x) = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(\partial v/\partial x_1)dx_1 \leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} |v||\partial v/\partial x_1| dx_1 = 2v_1(x_2)
$$

交换指标 1 和 2，$v^2(x) \leqslant 2v_2(x_1)$，由此

$$
\int_{\mathbf{R}^2} v^4(x)dx \leqslant 4\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(x_2)dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(x_1)dx_1
$$

$$
\leqslant 4\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|\partial v/\partial x_1\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|\partial v/\partial x_2\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}
$$

由此得 (3.12) (当 $n = 2$). $\square$

由 (3.11) 和 (3.12) 得

$$
(3.13)\qquad |b(u, v, w)| \leqslant c_4 \|u\|^{1/2} |u|^{1/2} \|w\|^{1/2} |w|^{1/2} \|v\|_s, \quad s = n/2
$$

今后取定

$$
(3.14)\qquad s = n/2
$$

当 $n = 2$ 记

$$
(3.15)\qquad V_s = V
$$

在所有情形(包括 $V_s = V$ 这种情形):

$$
(3.16)\qquad V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s
$$

这里 V' (相应地，V'_s) 为 V (相应地，V_s) 的对偶，而 H 与其对偶相同.

以 w_i 表 $V_s \to V'_s$ 的经典同构 Λ_s 的特征函数，即

$$
(3.17)\qquad ((w_i, v))_s = \lambda_i (w_i, v)^{1)}, \forall v \in V_s, \ |w_i| = 1. \ \square
$$

对 $u, v, w \in \mathscr{V}$，易于验证

$$
(3.18)\qquad b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0
$$

于是用 (3.11) 所得的连续延拓，类似的关系式对更一般的 u, v, w 成立.

---

1) (3.17) 右端不关于 i 求和.

3.2 变分不等方程的泛函提法

若在 (2.7) 中把 $\gamma = \gamma(u)$ 代以由 (2.4) 给的值，利用关系 (3.9) (和 $u' = \partial u/\partial t$) 则得

(3.19) $$\begin{aligned}&(u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) \\ &+ b(u(t), u(t), v - u(t)) + gj(v) \\ &- gj(u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t))\end{aligned}$$

但为得到最终的提法，继续做形式的变换，由 (3.18) 有

$$b(u(t), u(t), u(t)) = 0, \ b(u(t), u(t), v) = -b(u(t), v, u(t))$$

终得：

(3.20) $$\begin{aligned}&(u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) \\ &- b(u(t), v, u(t)) + gj(v) - gj(u(t)) \\ &\geqslant (f(t), v - u(t)) \quad \square\end{aligned}$$

按照维数 n 分为两种情形。

第一种情形：维数 $n = 2$

以下证明

定理 3.1 设 $n = 2$，则给定 f 和 u^0 满足

(3.21) $$f \in L^2(0, T; V')$$

(3.22) $$u^0 \in H$$

则存在唯一的函数 u 满足

(3.23) $$u \in L^2(0, T; V)$$

(3.24) $$\partial u/\partial t \in L^2(0, T; V')$$

对任意 $v \in V$，u 满足 (3.19) (或 (3.20))，且

(3.25) $$u(0) = u^0$$

第二种情形：维数 $n \geqslant 3$。

当维数 $n \geqslant 3$，必须 (至少对我们介绍的方法) 引进比 (3.20) "更弱的"解。

为简化计，这时设

(3.26) $$u^0 = 0$$

引进集合

(3.27) $W = \{v | v \in L^2(0, T; V_s), v' \in L^2(0, T; H), v(0) = 0\}$

可在 (3.20) 中取 $v = v(t)$(p.p.)；若 u 是 (3.20) 的解，则可验证

(3.28) $$\int_0^T \{(v', v - u) + \mu a(u, v - u) - b(u, v, u) + gj(v) - gj(u) - (f, v - u)\} dt \geqslant 0, \quad \forall v \in W$$

事实上，注意到 (3.20) ($v = v(t)$)，我们有

$$(v', v - u) + \mu a(u, v - u) - b(u, v, u) + gj(v) - gj(u) - (f, v - u) \geqslant (v' - u', v - u)$$

由此 (3.28) 的左端的积分等于或大于 $\frac{1}{2}|v(T) - u(T)|^2$，即得 (3.28)。

因此，取 (3.28) 作为问题的定义。下面将证明

定理 3.2 对任意的 n，设给定满足 (3.28) 的 f，则存在函数 u，满足

(3.29) $$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \partial u/\partial t \in L^2(0, T; V_s') \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

还满足 (3.28)。□

注 3.2 定理 3.2 中解的唯一性问题当 $n \geqslant 3$ 时尚未解决。

注 3.3 若 $n = 2$，将证明满足 (3.29) 的解的唯一性且 u 是定理 3.1 意义下的解(相应于 $u^0 = 0$)。□

注 3.4 在定理 3.2 的结构下，同样可处理"$u^0 \neq 0$"的情形，但这有其他技术性的困难，我们要避免。□

注 3.5 情形"$g = 0$"对应于 Leray 的工作 [1], [2], [3] 以来 Navier-Stokes 方程的弱(或湍流)解的经典提法，至少对 $n = 2$ 是如此。□

注 3.6 若 $n = 2$，则由 (3.23) 和 (3.24) 推出，在修改一零测集上的值后，$t \to u(t)$ 从 $[0, T]$ 到 H 连续。□

现由定理 3.2 开始证明前述的定理。

3.3 定理 3.2 的证明

证明的方案. 用可微泛函逼近 j;; 取[1)]

$$j_\varepsilon(v) = \frac{2}{1+\varepsilon}\int_\Omega (D_{\mathrm{II}}(v))^{(1+\varepsilon)/2}dx,\ \varepsilon > 0 \tag{3.30}$$

则有

$$(j'_\varepsilon(u), v) = \int_\Omega D_{\mathrm{II}}(u)^{(\varepsilon-1)/2}D_{ij}(u)D_{ij}(v)dx \tag{3.31}$$

自然的想法是以方程

$$\begin{aligned}(u'_\varepsilon, v) + \mu a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v)\\ + g(j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v) = (f, v)\end{aligned} \tag{3.32}$$

和

$$u_\varepsilon(0) = 0^{2)} \tag{3.33}$$

"逼近"不等方程。

但当 $n > 2$ 时, 求解 (3.32) 和 (3.33) 总有技术性的困难, 这要求引入二次正则化,加一个"粘性项"

$$\eta((u, v))_s\ (s = n/2),\ \eta > 0$$

引进双正则化方程

$$\begin{aligned}(u'_{\varepsilon\eta}, v) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v)\\ + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_s + g(j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) = (f, v)\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$u_{\varepsilon\eta}(0) = 0 \tag{3.35}$$

证明方法如下:

i) 求解 (3.34) 和 (3.35) 并得到先验估计;

ii) 对 ε 和 η 取极限. □

步骤 i)

利用空间 V_s 的"基" $w_1, \cdots w_m, \cdots$, 确切地说是特征函数 (3.17) 组成的"特殊"基. 定义 $u_m(=u_{\varepsilon\eta m})$ 为满足

$$(u'_m(t), w_j) + \mu a(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) \tag{3.36}$$

---

1) 以下的证明对 j 的其它正则化亦成立,这在数值问题中可能是重要的.

2) 在情形 $n = 2$ (定理 3.1), 对 $u_\varepsilon(0) = u^0(\neq 0)$ 沿用这一方法.

$$+\eta((u_m(t), w_j))_s + g(j_\varepsilon'(u_m(t)), w_j)$$
$$= (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

(3.37) $$u_m(0) = 0$$

的解. 这在一个区间 $[0, t_m]$ 内定义 u_m; 但随后的先验估计证明 $t_m = T$.

利用 $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$ 的事实,由 (3.36) 得[1]

(3.38) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \mu a(u_m(t)) + \eta\|u_m(t)\|_s^2$$
$$+ g(j_\varepsilon'(u_m(t)), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

但存在 $\alpha > 0$ 使

(3.39) $$a(v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V^{2)}$$

并且

(3.40) $$(j_\varepsilon'(v), v) \geqslant 0$$

由 (3.38) 推出

$$|u_m(t)|^2 + 2\alpha\mu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + 2\eta\int_0^t \|u_m(\sigma)\|_s^2 d\sigma$$
$$\leqslant 2\int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma^{3)}$$
$$\leqslant \alpha\mu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{\alpha\mu}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma$$

于是

(3.41) $$|u_m(t)|^2 + \alpha\mu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + 2\eta\int_0^t \|u_m(\sigma)\|_s^2 d\sigma$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha\mu}\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma$$

由此推出

(3.42) u_m 属于 $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ 中的一有界集,它不依赖于 m, ε, η.

1) 令 $a(u, v) = a(v)$.
2) 因 $v \in V \Longrightarrow v_i \in H_0^1(\Omega)$.
3) 令 $\|f\|_* = V'$ 中$\|\ \|$的对偶范数$=\text{Sup}[|(f, v)|/\|v\|]$, $v \in V$.

(3.43) $\eta^{1/2}u_m$ 属于(不依赖 m, ε, η 的) $L^2(0, T; V_s)$ 的

一有界集。 □

再证明

(3.44) u'_m 属于(不依赖 m, ε, η 的) $L^2(0, T; V'_s)$ 的一有界集。

首先注意对 $v \in V_s$

$$b(u_m(t), u_m(t), v) = -b(u_m(t), v, u_m(t))$$

从 (3.13) 得

$$|b(u_m(t), u_m(t), v)| \leqslant c_4\|u_m\| |u_m| \|v\|_s$$

根据 (3.42) 有 $|u_m(t)| \leqslant C$ (C 表示不依赖于 m, ε, η 的常数), 故有

(3.45) $$|b(u_m(t), u_m(t), v)| \leqslant c\|u_m(t)\|\|v\|_s$$

利用 (3.42) 即知

(3.46) $$\begin{cases} b(u_m(t), u_m(t), v) = (h_m(t), v), \quad v \in V_s \\ h_m \text{ 属于一个 } L^2(0, T; V'_s) \text{ 中的有界集。} \end{cases}$$

注意形式 $v \to a(u, v)$ 在 V 上连续, 于是

(3.47) $$a(u, v) = (Au, v), \quad A \in \mathscr{L}(V; V')$$

这样 (3.36) 即可写为(等价)形式

(3.48) $$(u'_m + \mu Au_m + h_m + \eta A_s u_m + gj'(u_m) - f, w_j)$$
$$= 0, 1 \leqslant j \leqslant m$$

若 P_m 是从 H 到 $[w_1, \cdots, w_m]$ 的正交投影, 则

(3.49) $$P_m h = (h, w_j)w_j \quad (j \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } m)$$

由 (3.48) 推出(因 $P_m u'_m = u'_m$)

(3.50) $$u'_m = P_m(f - \mu Au_m - h_m - \eta A_s u_m - gj\varepsilon'(u_m))$$

而由 (3.42) 和 (3.47), Au_m 属于

$$L^2(0; T; V') \subset L^2(0, T; V'_s)$$

的一有界集,

由 (3.43)

$$\|\eta A_s u_m\|_{L^2(0, T; V'_s)} = O(\eta^{1/2})$$

最后由 (3.31)

$$\|j_\varepsilon'(u)\|_* \leqslant c\left(\int_\Omega D_{\rm II}(u)^p dx\right)^{1/2}$$

于是特别有，$j_\varepsilon'(u_m)$ 属于 $L^2(0, T; V')$ 的一有界集。从而 (3.50) 蕴涵

(3.51)
$$\begin{cases} u_m' = P_m k_m \\ k_m \in L^2(0, T; V_s') \text{ 的一有界集.} \end{cases}$$

若证

(3.52)
$$\|P_m\varphi\|_{V_s'} \leqslant c\|\varphi\|_{V_s'}$$

则 (3.44) 成立。

因为(对于范数 $\|\varphi\|_{V_s'} = \|A_s^{-1}\varphi\|_{V_s}$) $\lambda_i^{1/2}w_i$ 组成 V_s' 的一完备正交系，所以

$$\|\varphi\|_{V_s'}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, w_i\lambda_i^{1/2})^2$$

$$\|P_m\varphi\|_{V_s'}^2 = \sum_{i=1}^{m} (\varphi, w_i\lambda_i^{1/2})^2.$$

由此对 $c = 1$ 有 (3.52)。 □

关于 m 过渡到极限　我们将同时使用紧致和单调[1]推理。由(3.42) 和 (3.44) 可从 u_m 取子序列 u_μ 满足

(3.53)
$$\begin{cases} u_\mu \to u_{\varepsilon\eta}, \text{在 } L^\infty(0, T; H) \text{ 中弱*和在 } L^2(0, T; V) \text{ 中弱} \\ u_\mu' \to u_{\varepsilon\eta}', \text{ 在 } L^2(0, T; V_s') \text{ 中弱} \\ u_\mu \to u_{\varepsilon\eta}, \text{ 在 } L^2(0, T; H) \text{ 中强} \end{cases}$$

再取一次子序列

(3.54)　$u_{i\mu}$ (u_μ 的第 i 个分量)在 $\Omega\times]0, T[$ 中 p.p. $\to u_{i\varepsilon\eta}$
($u_{\varepsilon\eta}$ 的第 i 个分量)

此外由 (3.12) 和 (3.42) $j_\varepsilon'(u_m)$ (相应地，$u_{i\mu}u_{j\mu}$)属于 $L^2(0, T; V')$ ($L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$) 的一有界集；于是同样可设

(3.55)
$$j_\varepsilon'(u_\mu) \to \chi \text{ 在 } L^2(0, T; V') \text{中弱}$$

(3.56)
$$u_{i\mu}u_{j\mu} \to \theta_{ij} \text{ 在 } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)) \text{ 中弱}$$

---

1) 见 Lions [1] 第 2 章的其它例子。

但由 (3.53)，比如可说在 Q 上广义函数的意义下 $u_{i\mu}u_{j\mu} \to u_{i\varepsilon\eta}u_{j\varepsilon\eta}$；与 (3.56) 比较即得

$$\theta_{ij} = u_{i\varepsilon\eta}u_{j\varepsilon\eta} \tag{3.57}$$

由上推出对任意 w_i

$$b(u_\mu, u_\mu, w_i) = -b(u_\mu, w_i, u_\mu) \to -b(u_{\varepsilon\eta}, w_i, u_{\varepsilon\eta}) \tag{3.58}$$

在 $L^2(0, T)$ 中弱

由 (3.36) (其中令 $m = \mu$) 推出

$$(u'_{\varepsilon\eta}, w_i) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, w_i) - b(u_{\varepsilon\eta}, w_i, u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, w_i))_s + g(\chi, w_i) = (f, w_i), \forall i \tag{3.59}$$

于是由函数系 w_i 在 V_s 中的完全性，从 (3.59) 导出

$$(u'_{\varepsilon\eta}, v) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) - b(u_{\varepsilon\eta}, v, u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_s + g(\chi, v) = (f, v), \forall v \in V_s \tag{3.60}$$

由于 (3.35) 显然成立，于是为结束步骤 i) 只需证明

$$\chi = j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) \tag{3.61}$$

为此利用一"单调推理"。 □

设 φ 是 $L^2(0, T; V_s)$ 中的函数，满足 $\varphi' \in L^2(0, T; V'_s)$，$\varphi(0) = 0$；令

$$X_\mu = g\int_0^T (j'_\varepsilon(u_\mu) - j'_\varepsilon(\varphi), u_\mu - \varphi)dt + \mu\int_0^T a(u_\mu - \varphi)dt + \eta\int_0^T \|u_\mu - \varphi\|_s^2 dt + \int_0^T (u'_\mu - \varphi', u_\mu - \varphi)dt$$

利用 (3.36)，我们有

$$\begin{aligned} X_\mu = &\int_0^T (f, u_\mu)dt - g\int_0^T [(j'_\varepsilon(u_\mu), \varphi) + (j'_\varepsilon(\varphi), u_\mu - \varphi)]dt \\ &- \mu\int_0^T [a(u_\mu, \varphi) + a(\varphi, u_\mu - \varphi)]dt \\ &- \eta\int_0^T [((u_\mu, \varphi))_s + ((\varphi, u_\mu - \varphi))_s]dt \\ &- \int_0^T [(u'_\mu, \varphi) + (\varphi', u_\mu - \varphi)]dt \end{aligned}$$

由此 $X_\mu \to X$，这里

$$X = \int_0^T \{(f, u_{\varepsilon\eta}) - g(\chi, \varphi) - g(j_\varepsilon'(\varphi) u_{\varepsilon\eta} - \varphi$$
$$- \mu a(u_{\varepsilon\eta}, \varphi) - \mu a(\varphi, u_{\varepsilon\eta} - \varphi) - \eta((u_{\varepsilon\eta}, \varphi))_\varepsilon$$
$$- \eta((\varphi, u_{\varepsilon\eta} - \varphi))_\varepsilon - (u_{\varepsilon\eta}', \varphi) - (\varphi', u_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} dt$$

但若在 (3.36) 中取 $v = u_{\varepsilon\eta}(t)$(p.p.)，这自然合法，即可推知

$$X = \int_0^T \{g(\chi - j_\varepsilon'(\varphi), u_{\varepsilon\eta} - \varphi) + \mu a(u_{\varepsilon\eta} - \varphi)$$
$$+ \eta \|u_{\varepsilon\eta} - \varphi\|_\varepsilon^2 + (u_{\varepsilon\eta}' - \varphi', u_{\varepsilon\eta} - \varphi)\} dt$$

由于对任意 μ，$X_\mu \geqslant 0$，我们有 $X \geqslant 0$

取 $\varphi = u_{\varepsilon\eta} - \lambda\phi$，$\phi \in L^2(0, T; V_\varepsilon)$，$\phi' \in L^2(0, T; V_\varepsilon')$，$\phi(0) = 0$，$\lambda > 0$，在除以 λ 后即可推出

$$g \int_0^T (\chi - j_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta} - \lambda\phi), \phi) dt + \lambda \int_0^T \{\mu a(\phi)$$
$$+ \eta \|\phi\|_\varepsilon^2 + (\phi', \phi)\} dt \geqslant 0$$

令 $\lambda \to 0$，则推出，对任意 ϕ

$$g \int_0^T (\chi - j_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}), \phi) dt \geqslant 0$$

由此即得 (3.61)。 □

这就结束了步骤 i)，从而证明了满足 (3.34)，(3.35) 的 $u_{\varepsilon\eta}$ 的存在性，并有

$$(3.62) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\eta} \text{ 属于 } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \text{ 的一有界集,} \\ u_{\varepsilon\eta}' \text{ 属于 } L^2(0, T; V_\varepsilon') \text{ 的一有界集,} \\ \eta^{1/2} u_{\varepsilon\eta} \text{ 属于 } L^2(0, T; V_\varepsilon) \text{ 的一有界集.} \end{cases}$$ □

步骤 ii) 对 W (见 (3.27)) 中固定的 v 引进表达式

$$(3.63) \quad Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T \{(v', v - u_{\varepsilon\eta}) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta})$$
$$+ b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}))_\varepsilon$$
$$+ g j_\varepsilon(v) - g j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (f, v - u_{\varepsilon\eta})\} dt$$

由于 (3.34)，我们有

$$(3.64) \quad Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T (v' - u_{\varepsilon\eta}', v - u_{\varepsilon\eta}) dt$$
$$+ g \int_0^T \{j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}), v - u_{\varepsilon\eta})\} dt$$

而(3.64)的第一项等于 $\frac{1}{2}|v(T)-u_{\varepsilon\eta}(T)|^2$,第二项由 $v\to j_\varepsilon(v)$ 的凸性$\geqslant 0$。于是 $Y_{\varepsilon\eta}\geqslant 0$ 或

$$(3.65)\quad \int_0^T\{(v',v-u_{\varepsilon\eta})+\mu a(u_{\varepsilon\eta},v)-b(u_{\varepsilon\eta},v,u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta},u_{\varepsilon\eta}))_s+gj_\varepsilon(v)-(f,v-u_{\varepsilon\eta})\}dt \geqslant \mu\int_0^T a(u_{\varepsilon\eta})dt+g\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt$$

由(3.62),可取一序列,仍记为 $u_{\varepsilon\eta}$,满足

$$(3.66)\quad \begin{cases} u_{\varepsilon\eta}\to u,\ \text{在 } L^\infty(0,T;H) \text{ 中弱}^* \text{和在 } L^2(0,T;V) \text{ 中弱} \\ u'_{\varepsilon\eta}\to u',\text{在 } L^2(0,T;V'_s) \text{ 中弱} \end{cases}$$

由(3.65)和(3.66)推出

$$(3.67)\quad \int_0^T\{(v',v-u)+\mu(u,v)-b(u,v,u) -(f,v-u)\}dt\geqslant \liminf\mu\int_0^T a(u_{\varepsilon\eta})dt + \liminf g\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt$$

由于函数 $v\to\int_0^T a(v)dt$ 在赋以弱拓扑的 $L^2(0,T;V)$ 中下半连续,我们有

$$(3.68)\qquad \liminf\int_0^T a(u_{\varepsilon\eta})dt\geqslant\int_0^T a(u)dt$$

现证

$$(3.69)\qquad \liminf\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt\geqslant\int_0^T j(u)dt$$

我们有

$$\int_0^T j(u)dt\leqslant 2\left(\int_Q D_{II}(u)^{(1+\varepsilon)/2}dx\,dt\right)^{1/(1+\varepsilon)}\left(\int_Q dx\,dt\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$$

由此

$$\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt\geqslant c_\varepsilon\left(\int_0^T j(u_{\varepsilon\eta})dt\right)^{1+\varepsilon}$$

$$c_\varepsilon=(2|Q|^{-\varepsilon}(1+\varepsilon)^{-1},\ |Q|=Q \text{ 的测度}$$

(3.70) $$\liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon_\eta})dt \geqslant \liminf \int_0^T j(u_{\varepsilon_\eta})dt$$

由于函数 $v \to \int_0^T j(v)$ 在 $L^2(0, T; V)$ 上凸且连续，则它对 $L^2(0, T; V)$ 中的弱拓扑下半连续，故

(3.71) $$\liminf \int_0^T j(u_{\varepsilon_\eta})dt \geqslant \int_0^T j(u)dt.$$

这结合 (3.70) 即给出 (3.69)。

由 (3.67)，(3.68)，(3.69) 知 u 满足 (3.28)。 □

3.4 定理 3.1 的证明

3.4.1 存在性的证明

在 "$n = 2$" 时，无须引进正则化项 $\eta((u, v))_s$ (见 (3.34))，因 $s = 1$，故 $V_s = V$，$\mu a(u, v)$ 与 $((u, v))_s$ 有同等效力。

我们直接解 (3.32)，代替 (3.33)，初始值为

(3.72) $$u_\varepsilon(0) = u^0$$

§ 3.3 的方法证明 (3.32)，(3.72) 的解 u_ε 的存在性，这里

(3.73) u_ε 属于 $L^2(0, T; V)$ 的一有界集。

(3.74) u_ε' 属于 $L^2(0, T; V')$ 的一有界集。

可以得到 (3.19) 的一强解(代替"弱"提法 (3.28)) 的存在性并证明唯一性的基本点在于估计式 (3.73)，(3.74) 在两空间 $L^2(0, T; V)$ 和 $L^2(0, T; V')$ 中成立，它们是对偶的。

对 $v \in L^2(0, T; V)$，引进(与 (3.63) 比较)

(3.75) $$Z_\varepsilon = \int_0^T \{(u_\varepsilon', v - u_\varepsilon) + \mu a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + g j_\varepsilon(v) - g j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon)\} dt$$

利用 (3.32) 可见

(3.76) $$Z_\varepsilon = g \int_0^T \{j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (j_\varepsilon'(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)\} dt \geqslant 0$$

于是

$$(3.77)\quad \int_0^T \{(u_\varepsilon', v) + \mu a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + gj_\varepsilon(v)$$

$$- (f, v - u_\varepsilon)\}dt \geqslant \int_0^T \{(u_\varepsilon', u_\varepsilon) + \mu a(u_\varepsilon)$$

$$+ gj_\varepsilon(u_\varepsilon)\}dt = \frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2}|u^0|^2$$

$$+ \mu\int_0^T a(u_\varepsilon)dt + g\int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon)dt$$

根据 (3.73)，(3.74) 可设从 u_ε 取一子列，仍记 u_ε，

(3.78) $u_\varepsilon(u_\varepsilon') \to u(u')$，在 $L^2(0, T; V)$ $(L^2(0, T; V'))$ 中弱

从 (3.78) 推出 $u_\varepsilon(T)$ 在 H 中弱 $\to u(t)$；于是 (3.7) 中右端的每一项按 (3.78) 定义的收敛都下半连续，由此[1]

$$\int_0^T \{(u', v) + \mu a(u, v) + b(u, u, v) + gj(v)$$

$$- (f, v - u)\}dt \geqslant \frac{1}{2}\lim\ \inf|u_\varepsilon(T)|^2$$

$$- \frac{1}{2}|u^0|^2 + \mu \lim\ \inf\int_0^T a(u_\varepsilon)dt$$

$$+ g\liminf\int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon)dt \geqslant \frac{1}{2}|u(T)|^2$$

$$- \frac{1}{2}|u^0|^2 + \mu\int_0^T a(u)dt + g\int_0^T j(u)dt$$

$$= \int_0^T \{(u', u) + \mu a(u) + gj(u)\}dt$$

因此

$$(3.79)\quad \int_0^T \{(u', v - u) + \mu a(u, v - u) + b(u, u, v) + gj(v)$$

$$- gj(u) - (f, v - u)\}dt \geqslant 0,\quad \forall v \in L^2(0, T; V)$$

现在证明，若 u 满足 (3.79)，则满足 (3.19)。为此设 w 是 V 的任一固定元素，而 t_0 是 $]0, T[$ 中任一固定时刻；对充分大的 j 引入

---

1) 仿 (3.58)，可看出 $\int_0^T b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v)dt \longrightarrow \int_0^T b(u, u, v)dt$.

$$\mathscr{O}_j =]t_0 - 1/j,\ t_0 + 1/j[\subset]0, T[$$

又定义 v 为

$$(3.80) \qquad v(t) = \begin{cases} w, \text{当 } t \in \mathscr{O}_j \text{ 时} \\ u(t), \text{当 } t \notin \mathscr{O}_j,\ t \in [0, T] \text{ 时} \end{cases}$$

对按 (3.80) 选择的 v，(3.79) 化为

$$(3.81) \quad \int_{\mathscr{O}_j} \{(u', w - u) + \mu a(u, w - u) + b(u, u, w) + gj(w) - gj(u) - (f, w - u)\} dt \geqslant 0$$

而

$$b(u, u, w) = (\tilde{u}, w),\ \tilde{u} \in L^2(0, T; V')$$

用 $|\mathscr{O}_j| = \mathscr{O}_j$ 的测度除 (3.81)，则得

$$(3.82) \quad |\mathscr{O}_j|^{-1} \int_{\mathscr{O}_j} (u' + \mu A u + \tilde{u} - f, w) dt - |\mathscr{O}_j|^{-1} \int_{\mathscr{O}_j} \{(u', u) + \mu a(u) + gj(u) - (f, u)\} dt + gj(w) \geqslant 0$$

根据对集函数微分的 Lebesgue 定理（例如见 Dunford-Schwartz [1] III 12.9）我们有，在 V' 中

$$|\mathscr{O}_j|^{-1} \int_{\mathscr{O}_j} (u' + \mu A u + \tilde{u} - f) dt \to u'(t_0) + \mu A u(t_0) + \tilde{u}(t_0) - f(t_0),\ t_0 \notin E_1,\ \mathrm{Mes}(E_1) = 0$$

又

$$|\mathscr{O}_j|^{-1} \int_{\mathscr{O}_j} \{(u', u) + \mu a(u) + gj(u) - (f, u)\} dt \to (u'(t_0), u(t_0)) + \mu a(u(t_0)) + gj(u(t_0)) - (f(t_0), u(t_0))$$

$$t_0 \notin E_2,\ \mathrm{Mes}(E_2) = 0$$

于是对 $t_0 \notin E_1 \cup E_2$，可在 (3.82) 取极限；我们得

$$(u'(t_0) + A u(t_0) + \tilde{u}(t_0) - f(t_0), w) - (u'(t_0), u(t_0)) - \mu a(u(t_0)) - (f(t_0), u(t_0)) + gj(w) - gj(u(t_0)) \geqslant 0$$

此即 (3.19)。

3.4.2 唯一性的证明

设 u 和 u_* 是 (3.19) 可能的两个解，满足 (3.23)，(3.24)，(3.25)（及对 u_* 类似的条件）。在 (3.19)（在对 u_* 类似的不等方程中）取 $v = u_*(t)$ $(v = u(t))$，这自然合理，两式相加（令 $U = u - u_*$）：

(3.83) $$-(U', U) - \mu a(U) - b(u, u, U) + b(u_*, u_*, U) \geqslant 0$$

由此

(3.84) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|U(t)|^2 + \mu\alpha\|U(t)\|^2 \leqslant b(u - U, u - U, U) - b(u, u, U) = -b(U, u, U)$$

根据 (3.13)

$$|b(U(t), u(t), U(t))| \leqslant c\|U(t)\|\,|U(t)|\,\|u(t)\| \leqslant \mu\alpha\|U(t)\|^2 + c'\|u(t)\|^2|U(t)|^2$$

若令

(3.85) $$m(t) = \|u(t)\|^2$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|U(t)|^2 \leqslant c'm(t)|U(t)|^2$$

由此

$$|U(t)|^2 \leqslant 2c'\int_0^t m(t)|U(\sigma)|^2 d\sigma$$

由于 $m \in L^1(0, T)$，从上式即推出 $U = 0$。□

注 3.7（注 3.2 的证明） 若 $n = 2$，则所有满足 (3.29) 和 (3.28) 的函数满足 (3.19)（于是当 $n = 2$ 时 (3.28)，(3.29) 有唯一解）。

事实上令

(3.86) $$W_1 = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), v' = L^2(0, T; V'), v(0) = 0\}$$

形式 $v \to$ (3.28) 的左端（当 $n = 2$ 时）在赋以由 W_1 导出的拓扑的

W 上连续，又由于 W 在 W_1 中稠密，可见(3.28)对任意 $v \in W_1$ 为真。

在 W_1 中任取 w。由于 $u \in W_1$ 可在 (3.28) 中取

(3.87) $$v = v_\theta = (1-\theta)u + \theta w, \quad \theta \in]0,1[$$

注意到

$$b(u, v_\theta, u) = \theta b(u, w, u)$$
$$j(v_\theta) \leqslant (1-\theta)j(u) + \theta j(w)$$

(3.28) 给出

(3.88) $$\theta \int_0^T \{(v_\theta', w-u) + \mu a(u, w-u) - b(u, w, u) + gj(w) - gj(u) - (f, w-u)\}dt \geqslant 0$$

除以 θ 并令 $\theta \to 0$ 由 (3.88) 推出

(3.89) $$\int_0^T \{(u', w-u) + \mu a(u, w-u) - b(u, w, u) + gj(w) - gj(u) - (f, w-u)\}dt \geqslant 0$$

(由于 W_1 在 $L^2(0, T; V)$ 中稠密)此即蕴涵 (3.79) 成立，即得结果。□

4. 二维情形的正则性定理

定理 4.1 设 $n=2$，给定 f 和 u^0 满足

(4.1) $$f \in L^2(0T; V'), \quad f' \in L^2(0, T; V'), \quad f(0) \in H$$

(4.2) $$u^0 \in V, \quad u^0 \in (H^2(\Omega))^2$$

则存在唯一函数 u 满足

(4.3) $$u \in L^2(0, T; V)^{1)}$$

(4.4) $$u' \in L^2(0T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

和 (3.19)，(3.25)。

证明. 从 (3.32)，(3.72) 的解 u_ε 出发，由附加的估计

(4.5) $$\|u_\varepsilon'\|_{L^2(0,T;V)} + \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C$$

可推出定理。为得 (4.5)，我们对下列问题的解 u_m 证明类似的估

---

1) 事实上，由 (4.4)，u 从 $[0, T] \to V$ 连续。

计：

(4.6) $$(u_m', w_j) + \mu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) + g(j_\varepsilon'(u_m), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

(4.7) $$u_m(0) = u_m^0, \quad u_m^0 \text{ 在 } V \cap (H^2(\Omega))^2 \text{ 中} \to u^0$$

在 (4.6) 中令 $t = 0$ 推出

(4.8) $$|u_m'(0)|^2 = -\mu a(u_m^0, u_m'(0)) - b(u_m^0, u_m^0, u_m'(0)) - g(j_\varepsilon'(u_m^0), u_m'(0)) + (f(0), u_m'(0))$$

由于 (4.2)，则 $|(a(u_m^0, u_m^0(0))| \leqslant |C|u_m'(0)|$. 同样，利用(4.1)得

$$|g(j_\varepsilon'(u_m^0), u_m'(0)) + (f(0), u_m'(0))| \leqslant c|u_m'(0)|$$

于是 (4.8) 给出

(4.9) $$|u_m'(0)|^2 \leqslant c|u_m'(0)| + |b(u_m^0, u_m^0, u_m'(0))|$$

但对二维情形，$H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$，故

$$|b(u_m^0, u_m^0, u_m'(0))| \leqslant c\|u_m^0\|_{(L^\infty(\Omega))^2}\|u_m^0\||u_m'(0)| \leqslant c|u_m'(0)|$$

由 (4.9) 即得

(4.10) $$|u_m'(0)| \leqslant C$$

现取 (4.6) 对 t 的导数（事实上，这是形式的，但可由取逼近对 t 的导数的差商来验证），即得

(4.11) $$(u_m'', w_j) + \mu a(u_m', w_j) + b(u_m', u_m, w_j) + b(u_m, u_m', w_j) + g((j_\varepsilon'(u_m))', w_j) = (f', w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

而正如第三章所见

$$(j_\varepsilon'(u_m)', u_m') \geqslant 0^{1)}$$

于是由(4.11) 推出

(4.12) $$(u_m'', u_m') + \mu a(u_m') + b(u_m', u_m, u_m') + b(u_m, u_m', u_m') \leqslant (f', u_m')$$

而

$$b(u_m, u_m', u_m') = 0$$

$$|b(u_m', u_m, u_m')| = |-b(u_m', u_m', u_m)| \text{（根据 (3.13)）}$$

---

1) 事实上，作为 j_ε 的单调性的推论，这一不等式的离散形式是正确的。

$$\leqslant c\|u_m'\|^{3/2}|u_m'|^{1/2}\|u_m\|^{1/2}|u_m|^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\mu\alpha\|u_m'\|^2 + c|u_m'|^2\|u_m\|^2|u_m|^2$$

由于已知 $|u_m(t)| \leqslant c$，我们有

$$|b(u_m', u_m, u_m')| \leqslant \frac{1}{4}\mu\alpha\|u_m'\|^2 + c|u_m'|^2\|u_m\|^2 \tag{4.13}$$

于是由 (4.12) 推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \mu\alpha\|u_m'(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{4}\mu\alpha\|u_m'(t)\|^2$$

$$+ c|u_m'(t)|^2\|u_m(t)\|^2 + \|f'(t)\|_*\|u_m'(t)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\mu\alpha\|u_m'(t)\|^2 + c|u_m'(t)|^2\|u_m(t)\|^2 + c\|f'(t)\|_*^2$$

考虑到 (4.10)，由上即得

$$|u_m'(t)|^2 + \mu\alpha\int_0^t\|u_m'(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c + c\int_0^t\|f'(\sigma)\|_*^2 d\sigma \tag{4.14}$$

$$+ c\int_0^t|u_m'(\sigma)|^2\|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma$$

根据 Gronwall 不等式，由 (4.14) 推出[1]

$$|u_m'(t)|^2 \leqslant c\exp\left(\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma\right),\quad t \leqslant T$$

由于

$$\int_0^T\|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant C$$

我们有

$$|u_m'(t)| \leqslant c \tag{4.15}$$

又 (4.14) 给出

$$\int_0^T\|u_m'(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c \tag{4.16}$$

即得所要之估计. □

---

1) 再提醒一次，c 表示不同常数.

5. 作为 Bingham 流体极限的 Newton 流体

5.1 结果的陈述

这节总假设

(5.1)
$$n = 2$$

用 u_g 表示定理 3.1 给定的解，以下 g 是变量(特别要趋于 0)，其余给定值固定。于是

(5.2) $u_g \in L^2(0, T; V)$, $\partial u_g/\partial t \in L^2(0, T; V')$, $u_g(0) = u^0$

(5.3)
$$\begin{cases} (u_g'(t), v - u_g(t)) + \mu a(u_g(t), v - u_g(t)) \\ \quad + b(u_g(t), u_g(t), v) + gj(v) - gj(u_g(t)) \\ \geqslant (f(t), v - u_g(t)), \ \forall v \in V \end{cases}$$

此外设 u 是 Navier-Stokes 方程的解，满足

(5.4) $u \in L^2(0, T; V)$, $u' \in L^2(0, T; V')$, $u(0) = u^0$

(5.5)
$$(u'(t), v) + \mu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \ \forall v \in V$$

往证[1]

定理 5.1 当 $g \to 0$ 时，我们有

(5.6)
$$\begin{cases} u_g \to u, \text{ 在 } L^2(0, T; V) \text{ 中弱} \\ u_g' \to u', \text{ 在 } L^2(0, T; V') \text{ 中弱} \end{cases}$$

5.2 定理 5.1 的证明

由定理 3.1 和 3.2 的证明知，对有界的 $g > 0$

(5.7)
$$\|u_g\|_{L^2(0,T;V)} + \|u_g'\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant c$$

因此，当 $g \to 0$ 可以 u_g 取一序列，仍记 u_g，满足

(5.8)
$$\begin{cases} u_g \to w, \text{ 在 } L^2(0, T; V) \text{ 中弱} \\ u_g' \to w', \text{ 在 } L^2(0, T; V') \text{ 中弱} \end{cases}$$

---

1) 作为补充在注 5.3 中给出关于 u_g 依赖 g 的一个一般结果.

$$\begin{cases} u_{i\varepsilon}\ (u_\varepsilon \text{ 的第 } i \text{ 个分量}) \to w_{i\varepsilon},\ \text{在 } L^2(Q) \text{ 中强和 p.p.}^{1)} \\ u_{i\varepsilon}u_{j\varepsilon} \to w_i w_j,\ \text{在 } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \text{ 中弱}^{2)} \end{cases}$$

于是

(5.9) $$b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) = -b(u_\varepsilon, v, u_\varepsilon) \to -b(w, v, w)$$

$$\text{在 } L^2(0, T) \text{ 中弱 } \forall v \in V$$

在(5.3)中取 $v = v(t)$ p.p. $v \in L^2(0, T; V)$，我们得

$$\int_0^T \{(u'_\varepsilon, v) + \mu a(u_\varepsilon, v) - b(u_\varepsilon, v, u_\varepsilon) + gj(v)$$

$$- gj(u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon)\} dt \geqslant \int_0^T \{(u'_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

$$+ \mu a(u_\varepsilon)\} dt = \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(u_\varepsilon) dt$$

利用(5.8)，(5.9)，由于 $\int_0^T gj(u_\varepsilon) dt \to 0$，即得

$$\int_0^T \{(w', v) + \mu a(w, v) - b(w, v, w) - (f, v - w)\} dt$$

$$\geqslant \liminf \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \liminf \int_0^T a(u_\varepsilon) dt$$

$$\geqslant \frac{1}{2} |w(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(w) dt$$

$$= \int_0^T (w', w) dt + \mu \int_0^T a(w) dt$$

于是

(5.10) $$\int_0^T \{(w', v - w) + \mu a(w, v - w) - b(w, v, w)$$

$$- (f, v - w)\} dt \geqslant 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; V)$$

(如 3.4.1 末一样)由此可得，在 $[0, T]$ 中 p.p. 有

(5.11) $$(w'(t), v - w(t)) + \mu a(w(t), v - w(t))$$

$$- b(w(t), v, w(t)) - (f, v - w(t)) \geqslant 0, \quad \forall v \in V$$

在(5.11)中取 $v = w \pm \phi$，$\phi \in V$，我们推出

---

1) 见(3.54)。

2) 见(3.56)。

(5.12) $$(w'(t),\phi)+\mu a(w(t),\phi)-b(w(t),\phi,w(t))$$
$$-(f(t),\phi)=0,\ \forall\phi\in V$$
(由于 (5.4) 和 (5.5) 解的唯一性)由此即得
$$w=u$$
定理得证. ▯

注 5.1 可以利用定理 5.1 的证明得到 (5.4), (5.5) 的解 u 的存在性. (5.4), (5.5) 的解的唯一性的证明类似于 (3.4.2), 但这多少有点人为, 因为前面的证明当中沿用了 Navier-Stokes 方程中用过的方法.

注 5.2 在定理 4.1 的条件下, 我们获得补充结果

(5.13) $$u'_g\to u',\ 在\ L^2(0,T;V)\ 中弱$$
$$并且在\ L^\infty(0,T;H)\ 中弱^*\ ▯$$

注 5.3[1] 我们要证明

定理 5.2 对任意有限的 $g_0>0$, g_1, $g_2\in[0,g_0]$, 存在 $c(g_0)=c$, 使

(5.14) $$\|u_{g_1}-u_{g_2}\|L^\infty(0,T;H)+\|u_{g_1}$$
$$-u_{g_2}\|L^2(0,T;V)\leqslant c|g_1-g_2|$$

证明. 在关于 u_{g_1} (相应地, u_{g_2}) 的不等方程中取 $v=u_{g_2}$ (相应地, $v=u_{g_1}$), 令 $u_{g_1}-u_{g_2}=w$, $a(w,w)=a(w)$, 两式相加即得

$$-(w',w)-\mu a(w)+b(u_{g_1},u_{g_1},u_{g_2})+b(u_{g_2},u_{g_2},u_{g_1})$$
$$+(g_1-g_2)(j(u_{g_1})-j(u_{g_2}))\geqslant 0$$

或改写为

(5.15) $$(w',w)+\mu a(w)\leqslant|g_1-g_2||j(u_{g_1})$$
$$-j(u_{g_2})|+|b(w,w,u_{g_1})|$$

而

$$|b(w,w,u_{g_1})|\leqslant c_1\|u_{g_1}\|\|w\||w|\leqslant\frac{1}{2}\mu a(w)+c_1\|u_{g_1}\|^2|w|^2$$

由此 (5.15) 给出

---

1) 这个注可以跳过.

(5.16) $$\frac{d}{dt}|w(t)|^2+\mu a(w(t))\leqslant 2|g_1-g_2||j(u_{g_1})-j(u_{g_2})|+2c_1\|u_{g_1}\|^2|w|^2$$

而

$$|j(u_{g_1})-j(u_{g_2})|\leqslant j(u_{g_1}-u_{g_2})=j(w)\leqslant c_2a(w)^{1/2}$$

(由 Cauchy-Schworz 不等式)

由此得

$$2|g_1-g_2||j(u_{g_1})-j(u_{g_2})|\leqslant\frac{1}{2}\mu a(w)+c_2|g_1-g_2|^2$$

由(5.16)推出

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2+\frac{1}{2}\mu\ a(w)\leqslant 2c_1\|u_{g_1}\|^2|w|^2+c_2|g_1-g_2|^2$$

于是对 $t\leqslant T$

(5.17) $$|w(t)|^2+\frac{1}{2}\mu\int_0^t a(w(\sigma))d\sigma\leqslant c_2T|g_1-g_2|^2+2c_1\int_0^t\|u_{g_1}\|^2|w(\sigma)|^2d\sigma$$

由 Gronwall 不等式,特别,上式可推出

(5.18) $$|w(t)|^2\leqslant c_2T|g_1-g_2|^2\exp\left(2c_1\int_0^t\|u_{g_1}(\sigma)\|^2d\sigma\right)\leqslant c_2T|g_1-g_2|^2\exp\left(2c_1\int_0^T\|u_{g_1}\|^2d\sigma\right)$$

而对 $g_1\in[0,g_0]$, u_{g_1} 属于 $L^2(0,T;V)$ 的一有界集,故

(5.19) $$|w(t)|\leqslant c_3|g_1-g_2|,\quad t\in[0,T]$$

把(5.19)代入(5.17)右端的第二项,即得

$$\|w\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant c_4|g_1-g_2|$$

由此即得(5.14). □

注 5.4 "$g\to+\infty$"的情形. 往证

(5.20) 当 $g\to\infty$ 时 $u_g\to 0$, 在 $L^2(0,T;V)$ 中弱

事实上,注意到

(5.21) 当 $g\to+\infty$, $\|u_g\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant c$

可首先部分地把(5.7)精密化(反之,当 $g\to\infty$ 时 $\|u_g'\|_{L^2(0,T;V')}$

$\leqslant c$ 不成立，因为定理 3.1 证明中 u_g' 的估计与 g 有关）

此外，若在 (5.3) 中令 $v=0$，则有

$$(5.22)\qquad g\int_0^T j(u_g)dt+\mu\int_0^T a(u_g)dt+\frac{1}{2}|u_g(T)|^2$$

$$\leqslant\int_0^T(f,u_g)dt+\frac{1}{2}|u^0|^2$$

由此推出

$$(5.23)\qquad \int_0^T j(u_g)dt\leqslant c/g$$

根据 (5.21)，可取一序列，仍记为 u_g，满足

$$(5.24)\qquad u_g\to w，在 L^2(0,T;V) 中弱$$

由于函数 $v\to\int_0^T j(v)$ 对于 $L^2(0,T;V)$ 中的弱拓扑下半连续则有

$$\liminf\int_0^T j(u_g)dt\geqslant\int_0^T j(w)dt$$

结合 (5.23)，这就指明

$$\int_0^T j(w)dt=0$$

故 $j(w)=0$ p.p. 成立，从而 $w=0$，得所欲证。 □

显然，结果 (5.20) 从力学观点看是说，流体在极限状态（当 $g\to\infty$）的特性与固体相同。

此外在假设

$$(5.25)\quad f=\{f_1,f_2\},\ f_i\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ i=1,2,\ u^0=0$$

下可以补充 (5.20)。

往证

$$(5.26)\qquad 当\ g\geqslant g_c=适当的临界值时，u_g=0.$$

事实上，由唯一性，只需验证，对充分大的 g，零函数是 (5.3) 的解，即

$$(5.27)\qquad gj(v)\geqslant(f(t),v),\quad\forall v\in V$$

而由 (5.25)

$$|(f(t), v)| \leqslant c_1(\|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|v_2\|_{L^2(\Omega)})$$

根据属 L. Nirenberg[1] 又为 M. J. Strauss[1] 所推广的结果

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|v_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_2 j(v)$$

即得

$$|(f(t), v)| \leqslant c_3 j(v)$$

故 (5.27) 显然对充分大的 g 成立。 □

尚未解决的问题

1) 已知在 $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ 中取值的函数 $g \to u_g$ 在 g 的所有紧集上满足 Lipschitz 条件，计算 $\partial u_g/\partial g$ 在 g 的一零测集外的值。

2) 是否能证明 $D_{ij}(u_g) = 0$ 的区域随 g 增大？从力学上看，这是直观的，并且与 M. Fortin[1] 的数值结果相符合。

6. 稳定问题

6.1 结果的陈述

为方便计，下面我们引进参数 $\lambda \geqslant 0$。

定理 6.1 设 f 在 V' 中给定，则存在 $u \in V$，满足

(6.1) $\mu a(u, v-u) + \lambda b(u, u, v) + gj(v) - gj(u) \geqslant (f, v-u), \quad \forall v \in V_\sigma$

其中

(6.2) $\sigma = \max(1, n/2 - 1)$ （故当 $n \leqslant 4$ 时 $\sigma = 1$）

注意，这一陈述有意义，因为 $u, v, w \to b(u, v, w)$ 在 $V \times V \times V_\sigma$ 上连续(利用 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，后者蕴涵 $u \in L^{q_1}(\Omega)$，当 $n > 2$，$1/q_1 = \frac{1}{2} - 1/n$，$w \in L^{q_2}(\Omega)$，$1/q_2 = \frac{1}{2} - \sigma/n$)。 □

此外，还可研究当 $g \to 0$ 时解的变化状况：

定理 6.2 假定 $n \leqslant 4$，则可求得 (6.1) 的一族解 u_g，当 $g \to 0$

有

(6.3) $$u_\varepsilon \to u, \text{ 在 } V \text{ 中弱}$$

其中 u 是关于 Newton 流体稳定问题的一个解：

(6.4) $$\begin{cases} \mu a(u, v) + \lambda b(u, u, v) = (f, v), \ \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$ □

注 6.1 假定 $n \leqslant 4$，则 $b(u, v, w)$ 在 $V \times V \times V$ 上连续且

(6.5) $$b(u, v, w) \leqslant c_1 a(u)^{1/2} a(v)^{1/2} a(w)^{1/2}$$

此外，对 $f \in V'$，令

(6.6) $$[f]_* = \operatorname{Sup}(|(f, v)|/a(v)^{1/2}), v \in V$$

则有

(6.7) 若 $\mu^2 > \lambda c_1 [f]_*$，则 (6.1) 的解 $u(=u_\varepsilon)$ 唯一，同样，稳定 Navier-Stokes 方程的解 u 唯一，且无须取子序列 (6.3) 亦成立。

事实上，若 u（相应地，u_*）是 (6.1) 的解且在 (6.1) 中（在对 u_* 的类似不等方程中）取 $v = u_*$（相应地，u），当 $n \leqslant 4$ 时，这是合理的，两式相加（并记 $w = u - u_*$），则有

$$-\mu a(w) + \lambda b(u, u, u_*) + \lambda b(u_*, u_*, u) \geqslant 0$$

故

(6.8) $$\mu a(w) \leqslant \lambda b(w, w, u) \leqslant \lambda c_1 a(w) a(u)^{1/2}$$

而在 (6.1) 中令 $v = 0$，我们有

$$\mu a(u) + gj(u) \leqslant (f, u) \leqslant [f]_* a(u)^{1/2}$$

特别由此有

$$\mu a(u)^{1/2} \leqslant [f]_*$$

故 (6.8) 给出

$$\mu a(w) \leqslant \lambda c_1 \mu^{-1} [f]_* a(w)$$

若 (6.7) 成立，由此即得"$w = 0$"。

（这个注类似于 Lions[1] 第一章注 7.6）□

注 6.2 当 $\lambda = 0$ 时，有

(6.9) $$\mu a(u, v - u) + gj(v) - gj(u) \geqslant (f, v - u), \ \forall v \in V$$

在 V 中解 u 的存在性和唯一性．在第 9 节我们还要回到这一问

题。□

6.2 证明

定理 6.1 的证明。我们只给出证明的大意。

由双正则化方程[1]

(6.10) $$\mu a(u_{\varepsilon\eta_1}, v) + \eta((u_{\varepsilon\eta_1}, v))_\sigma + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + g(j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) = (f, v), \ \forall v \in V_\sigma$$

开始，其中 j_ε 的定义如第 3 节。

用单调法可证明 $u_{\varepsilon\eta}$ 的存在性(见 Lions[1] 第 2 章)。此外还可证明

(6.11) $$\|u_{\varepsilon\eta}\| \leqslant C \text{（常数不依赖于 } \varepsilon, \eta, \lambda, g\text{）}$$

(6.12) $$\eta^{1/2}\|u_{\varepsilon\eta}\|_\sigma \leqslant C$$

用类似于定理 3.2 中的方法对 ε，η 取极限，为此引入

(6.13) $$Y_{\varepsilon\eta} = \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}))_\sigma + gj_\varepsilon(v) - gj_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (f, v - u_{\varepsilon\eta})$$

利用 (6.10) 我们看出

$$Y_{\varepsilon\eta} = g[j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v - u_{\varepsilon\eta})] \geqslant 0$$

由此

(6.14) $$\mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_\sigma + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + gj_\varepsilon(v) - (f, v - u_{\varepsilon\eta}) \geqslant \mu a(u_{\varepsilon\eta}) + gj_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})$$

根据 (6.11)，可取一子序列，仍记 $u_{\varepsilon\eta}$，使

(6.15) $$u_{\varepsilon\eta} \to u, \text{ 在 } V \text{ 中弱}$$

于是 (6.14) 的左端收敛到[2]

(6.16) $$\mu a(u, v) + \lambda b(u, u, v) + gj(v) - (f, v - u), \ v \in V_\sigma$$

此外

$$\liminf a(u_{\varepsilon\eta}) \geqslant a(u)$$

---

1) 当 $n \leqslant 4$ 时不需要 $\eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_\sigma$ 这一项。

2) 为证明 $b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) \to b(u, u, v)$，使用一个紧推理。

而用导出 (3.71) 的类似推理可得

$$\liminf j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) \geqslant j(u)$$

与 (6.11) (6.14) 一起，由此推出 u 满足 (6.1)。□

定理 6.2 的证明。定理 6.1 的证明指出

$$(6.17)\qquad \mu a(u_g, v-u_g)+\lambda b(u_g,u_g,v)+gj(v) - gj(u_g) \geqslant (f, v-u_g), \forall v\in V$$

的解 $u_g\in V$ 的存在性，并且

$$(6.18)\qquad \|u_g\| \leqslant c \ (\text{常数，不依赖于 } g\geqslant 0)$$

于是可取一序列，仍记 u_g，使 (6.3) 成立，由此即得定理 6.2，只需再证 u 是 (6.4) 的解。

而从 (6.17) 推出

$$(6.19)\qquad \mu a(u_g, v)+\lambda b(u_g,u_g,v)+gj(v) - (f, v-u_g) \geqslant \mu a(u_g)$$

(6.19) 左端当 $g\to 0$ 时收敛到

$$\mu a(u,v)+\lambda b(u,u,v)-(f,v-u)$$

而

$$\liminf \mu a(u_g) \geqslant \mu a(u)$$

故

$$(6.20)\qquad \mu a(u,v-u)+\lambda b(u,u,v)-(f,v-u)\geqslant 0$$

取 $v=u\pm w$，$w\in V$，这是允许的，则有，u 满足 (6.4)。□

注 6.3 用注 5.4 中的类似推理可验证

$$(6.21)\qquad \text{当 } g\to +\infty \text{ 时}, u_g\to 0, \text{在 } V \text{ 中弱}$$

(u_g 是 (6.17) 的任意解)。□

7. 外 部 问 题

7.1 问题在变分不等方程形式下的提法

仿第 3 节，利用空间 V，V_s (该节定义无论 Ω 有界与否皆有效)。

引入函数 v 的集合 $\mathscr{U}_{ad}$，下面即将明确 v 所属的泛函类，这

些函数的散度为零，且

(7.1)　在 Γ 上，$v=0$；在无穷远点，$v \to \{v, 0, 0\}$

(7.1) 的第二个条件的适当意义也在下面说明. 形式上，问题是求 $u=u(t)$，满足

$$u(t) \in \mathscr{U}_{ad} \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} (\partial u(t)/\partial t, v-u(t)) + \mu a(u(t), v-u(t)) \\ \quad + b(u(t), u(t), v-u(t)) + gj(v) - gj(u(t)) \\ \geqslant (f(t), v-u(t)), \quad \forall v \in \mathscr{U}_{ad} \end{cases} \tag{7.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in \mathscr{U}_{ad} \tag{7.4}$$

若引入

$$w(t) = u(t) - u_0 \tag{7.5}$$

我们要求

$$w(t) \in V \tag{7.6}$$

(一俟 u_0 给定，这就明确了条件"在无穷远点 $u(t)=\{U,0,0\}$"的意义)使得

$$\begin{cases} (w'(t), v-w(t)) + \mu a(w(t), v-w(t)) + b(w(t), w(t), v \\ \quad -w(t)) + c(w(t), v-w(t)) + gj(v+u_0) \\ \quad\quad - gj(w(t)+u_0) \geqslant (\tilde{f}(t), v-w(t)), \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{7.7}$$

其中

$$c(w, v) = b(u_0, w, v) + b(w, u_0, v) \tag{7.8}$$

$$(\tilde{f}(t), v) = (f(t), v) - a(u_0, v) - b(u_0, u_0, v) \tag{7.9}$$

w 还满足初条件 $w(0)=0$.

设

(7.10)　$\partial u_0/\partial x_i \in (L^\infty(\Omega))^3$, $i=1, 2, 3$ (或在二维情形 $(L^\infty(\Omega))^2$) 则有

$$|c(v, v)| \leqslant c_0|v|^2 \quad \square \tag{7.11}$$

现在可确切地提出问题，按照维数 n 是 2 或 3 而分成两种情形：

1) 在 $n=2$ 的情形，我们求满足 (7.7) 的 w，并且

$$w \in L^2(0, T; V), \quad \partial w/\partial t \in L^2(0, T; V') \tag{7.12}$$

(7.13) $$w(0)=0$$

2) 在 $n=3$ 的情形，我们要求 w，满足

(7.14) $w\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$, $\partial w/\partial t\in L^2(0,T;V_s')$

(7.13) 以及“弱”不等方程

(7.15) $$\int_0^T[(v',u-w)+\mu a(w,v-w)-b(w,v,w)$$
$$+c(w,v-w)+gj(v+u_0)$$
$$-gj(w+u_0)-(\tilde{f},v-w)]dt\geqslant 0$$

其中 v 任意，只要满足

(7.16) $v\in L^2(0,T;V_s)$, $v'\in L^2(0,T;H)$, $v(0)=0$ ▯

7.2 结果

我们有下列结果:

(7.17) 对给定的 $L^2(0,T;V')$ 中的 f 和满足 (7.10) 的$u^0\in V$，存在 (7.7) (7.12), (7.13) 的唯一解 u。

(7.18) 对给定的 $L^2(0,T;V')$ 中的 f 和满足 (7.10)的$u^0\in V$，存在 (7.13), (7.14), (7.15) 的解 w($n=3$ 的情形)。▯

注 7.1 (7.18) 中的唯一性问题尚未解决。

注 7.2 同样得到 4,5 节中的类似结果。▯

对于结果 (7.17), (7.18) 的证明，仿前几节进行. 我们只限于证明情形 (7.17) 的基本线索;对情形 (7.18), 仿前几节，要引入一附加的正则化项.

于是从下列问题的解开始

(7.19) $$(w_\varepsilon',v)+\mu a(w_\varepsilon,v)+b(w_\varepsilon,w_\varepsilon,v)+c(w_\varepsilon,v)$$
$$+g(j_\varepsilon'(w_\varepsilon+u_0),v)=(\tilde{f},v)$$

(7.20) $$w_\varepsilon(0)=0$$

为此，使用 Galerkin 法，但 V 的“基”$w_1,\cdots,w_m,\cdots$是任意的[1]. 先验估计中有些不同. 在 (7.19) 中令 $v=w_\varepsilon$. 不再有

1) 在非有界开集上，不再能使用特征函数组成的基. 这里可用 Lions-Strauss [1]62 页中方法.

$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \alpha > 0$，因 Ω 不是有界集，但

(7.21) $\quad a(v, v) + |v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2, \ \alpha > 0, \ v \in V$

此外利用 (7.11) 和下列事实

$$(j_\varepsilon'(w_\varepsilon + u_0), w_\varepsilon) = (j_\varepsilon'(w_\varepsilon + u_0), w_\varepsilon + u_0) - (j_\varepsilon'(w_\varepsilon + u_0), u_0) \geqslant -(j_\varepsilon'(w_\varepsilon + u_0), u_0) \geqslant -c_1(1 + \|w_\varepsilon(t)\|)$$

由 Gronwall 不等式[1]可得

(7.22) $$|w_\varepsilon(t)| \leqslant c$$

(7.23) $$\int_0^T \|w_\varepsilon\|^2 d\sigma \leqslant c$$

现在 w_ε' 的估计亦有差别。为得到这一估计，我们利用关于 t 的 Fourier 变换[2]：

(7.24) 若 $D_t^{1/4-\beta} w_{\varepsilon m} = |\tau|^{1/4-\beta}\hat{\omega}_{\varepsilon m}$ 关于 τ 的 Fourier 逆变换在 $(0, T)$ 上的限制，其中 $\hat{\omega}_{\varepsilon m}$ 是 $\tilde{w}_{\varepsilon m}$ 关于 t 的 Fourier 变换 ($\tilde{w}_{\varepsilon m}$ 是 $w_{\varepsilon m}$ 的延拓，在 $(0, T)$ 外取 0)，

则

(7.25) $\quad \forall\beta > 0, D_t^{1/4-\beta} w_{\varepsilon m}$ 属于 $L^2(0, T; H)$ 的一有界集。

利用 Lions[1]，第一章定理 5.2，由此推出可取一序列 $w_{\varepsilon\mu}$ 使 $w_{\varepsilon\mu} \to w_\varepsilon$，在 $L^\infty(0, T; H)$ 中弱*，且在 $L^2(0, T; V)$ 中弱[3]

$$w_{\varepsilon\mu i} w_{\varepsilon\mu j} \to w_{\varepsilon i} w_{\varepsilon j}，在 L^2(Q) 中弱$$

由此推出 w_ε 满足 (7.19), (7.20) 和估计

(7.26) $$\|w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} + \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|D_t^{1/4-\beta} w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant c$$

最后，仿第 3 节，取极限。□

注 7.2 另一证明方法在于引进有界开集

(7.27) $$\Omega_M = \Omega \cap \{x \mid |x| < M\}$$

在 Ω_M 上（对固定的 M 应用第 3 节的方法）解类似的问题，然后令 M 趋于 $+\infty$。□

---

1) 这些估计首先对近似解 $w_{\varepsilon m}$ 建立，然后对 m 取极限。

2) 见 Lions[1]，第 1 章 § 6.5. 那里的证明在这里有效。

3) 在 $\bar{\Omega}$ 的所有紧集上利用所引著作的第 1 章定理 5.2.

8. 在一柱形管中的层状流

8.1 方程的回顾

设 Ω 是管的截面;设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 的一有界开集，其边界 Γ 光滑.我们求速度场 $u=u(x)$(u 是数值),满足方程

(8.1) $$\text{在 } \Omega \text{ 内 } \sigma^D_{31,1}+\sigma^D_{32,2}=-c^{1)}$$

(8.2) $$\text{在 } \Omega \text{ 内 } \sigma^D_{3i}=g\frac{D_{3i}}{[(D_{13})^2+(D_{23})^2]^{1/2}}+2\mu D_{3i},\ i=1,2$$

和边条件

(8.3) $$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } \quad u=0$$

我们记得在 (8.2) 中

(8.4) $$D_{3i}=\frac{1}{2}u_{,i},\ i=1,2$$

现在我们给出变分形式的叙述,以得出问题的确切提法.

8.2 变分提法

定理 8.1 若速度场 u 是 (8.1), (8.2), (8.3) 的"强"解,则 u 满足变分不等方程

(8.5) $$\mu a(u,v-u)+gj(v)-gj(u)\geqslant(c,v-u),\quad \forall v\in H^1_0(\Omega)$$

其中

(8.6) $$a(u,v)=\int_\Omega \operatorname{grad}u\operatorname{grad}v\,dx$$

(8.7) $$j(v)=\int_\Omega |\operatorname{grad}v|\,dx$$

(8.8) $$(f,v)=\int_\Omega fv\,dx$$

证明.

---

1) c = 单位长度上的压强降落.

以 $v-u$ 乘 (8.1) 并进行分部积分

(8.9) $$\int_\Omega \sigma_{3i}^{D}(v-u)_{,i}dx-(c,v-u)=0$$

利用 (8.2) 推出

(8.10) $$\mu\int_\Omega u_{,i}(v-u)_{,i}dx+g\int_\Omega \frac{u_{,i}(v-u)_{,i}}{(u_{,i},u_{,i})^{1/2}}dx=(c,v-u)$$

由于

$$u_{,i}v_{,i}\leqslant(u_{,i}u_{,i})^{1/2}(v_{,i},v_{,i})^{1/2}$$

由 (8.10) 即推出 (8.5). ▯

于是在一个柱状管中的层状流问题的确切提法是：求 (8.5) 的解 $u\in H_0^1(\Omega)$.

由于 (8.5) 右端包含常数 c 这一事实不起本质的作用，故我们引入更一般的问题，以使叙述更清晰：

(8.11) $$\begin{cases}\text{对给定的 } L^2(\Omega) \text{ 中的 } f,\ \text{求解 } u\in H_0^1(\Omega) \text{ 满足} \\ \mu a(u,v-u)+gj(v)-gj(u)\geqslant(f,v-u),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\end{cases}$$ ▯

注 8.1 若更一般地假定

(8.12) $$f\in H^{-1}(\Omega)$$

则上面的叙述有意义，并且下面的定理 8.2 仍有效。但在定理 8.3 中需设“$f\in L^2(\Omega)$”. ▯

问题 (8.11) 等价于泛函

(8.13) $$J_g(v)=\frac{1}{2}\mu a(v)+gj(v)-(f,v)^{1)}$$

的极小值问题，其中

(8.14) $$a(v)=a(v,v)$$

于是由第一章第 3 节，我们有

定理 8.2 问题 (8.11)（或等价问题 (8.13)）有唯一解 u_g.

现在转向 u_g 的性质和函数 $g\to u_g$ 的研究。

---

1) 引进指标 g，为的是下面要令 g 变化，这毫不影响问题的叙述。

8.3 解的性质

定理 8.3 函数 $g \to u_g$ 从 $g \geqslant 0 \to H_0^1(\Omega)$ 是 Lipschitz 连续的，并且

(8.15) $u_g = 0$ 对 $g \geqslant g_c =$ 依赖 Ω 和 f 的一临界值

(8.16) 函数 $g \to a(u_g)$（相应地，$g \to j(u_g)$）连续且单调下降（当 $g \geqslant g_c$ 为零）.

证明. 若在 (8.11) 中先令 $v = 0$，再令 $v = 2u = 2u_g$，则可发现

$$\mu a(u_g) + g j(u_g) = (f, u_g) \tag{8.17}$$

于是

$$J_g(u_g) = -\frac{1}{2}\mu a(u_g) \tag{8.18}$$

由 (8.17) 推出（当 $f \in H^{-1}(\Omega)$，亦真）对 $g \geqslant 0$ 有

$$\|u_g\| \leqslant c \quad (\|\ \| = H_0^1(\Omega) \text{ 中的范数}) \tag{8.19}$$

现在证明 $g \to u_g$ 的强连续性和 Lipschitz 性质：

$$a(u_g - u_{g_0})^{1/2} \leqslant \mu^{-1}(\mathrm{Mes}\Omega)^{1/2}|g - g_0| \tag{8.20}$$

事实上在关于 u_g（相应地，u_{g_0}）的不等方程 (8.11) 中取 $v = u_{g_0}$（相应地，u_g），相加，即得

$$-\mu a(u_g - u_{g_0}) - (g - g_0)(j(u_g) - j(u_{g_0})) \geqslant 0 \tag{8.21}$$

而

$$\begin{aligned} |j(v) - j(w)| &= \left|\int_\Omega (|\mathrm{grad}\, v| - |\mathrm{grad}\, w|)dx\right| \\ &\leqslant j(v - w) \leqslant (\mathrm{Mes}\Omega)^{1/2} a(v - w)^{1/2} \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \end{aligned} \tag{8.22}$$

于是 (8.21) 给出

$$\mu a(u_g - u_{g_0}) \leqslant (\mathrm{Mes}\Omega)^{1/2}|g - g_0| a(u_g - u_{g_0})^{1/2} \tag{8.23}$$

由此即得 (8.20).

现在证明 (8.15). 根据 Nirenberg 和 M. Strauss[1] 的定理[1]，我们有

$$|(f, v)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^1(\Omega)} \leqslant c_1\|f\|_{L^2(\Omega)} j(v) \tag{8.24}$$

于是，只要对任意 v，$gj(v) \geqslant (f, v)$，$u = 0$ 就是 (8.11) 的解．根据(8.24)，这只须

(8.25) $$g \geqslant c_1\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

剩下要证性质 (8.16)．我们有，当 $g \leqslant h$ 时，$J_g(v) \leqslant J_h(v)$，$\forall v$，于是

$$\operatorname{Inf} J_g(v) = -\frac{1}{2}\mu a(u_g) \leqslant \operatorname{Inf} J_h(v) = -\frac{1}{2}\mu a(u_h)$$

由此得 $g \to a(u_g)$ 的单调下降性．

此外 (8.21) 指出

$$(g - g_0)(j(u_g) - j(u_{g_0})) \leqslant 0$$

由此即得 $g \to j(u_g)$ 的单调下降性．▯

往证

定理 8.4 若假定

(8.26) $$在\ \Omega\ 内\ \text{p.p.}\ f \geqslant 0$$

则

(8.27) $$在\ \Omega\ 内\ \text{p.p.}\ u_g \geqslant 0$$

证明．在 (8.11) 中(把 u_g 写成 u)，令 $v = u^+$；则 $v - u = u^-$，则得

(8.28) $$\mu a(u, u^-) + g(j(u^+) - j(u)) \geqslant (f, u^-)$$

而 $a(u, u^-) = -a(u^-)$，又由

(8.29) $$j(u) = j(u^+) + j(u^-)$$

推知

(8.30) $$\mu a(u^-) + gj(u^-) + (f, u^-) \leqslant 0$$

由 $f \geqslant 0$，有 $(f, u^-) \geqslant 0$，于是 (8.30) 蕴涵 $a(u^-) = 0$，故

$$u^- = 0 \ ▯$$

现在要给出对两个区域 Ω_1, Ω_2，$\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ 的解的比较性质：设 u_i 是下列问题的解：

(8.31) $$\begin{cases} \mu a_{\Omega_i}(u_i, v - u_i) + g(j_\Omega(v) - j_\Omega(u_i)) \geqslant (f_i, v - u_i)_{\Omega_i} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega_i),\ i = 1, 2 \ \ (u_i \in H_0^1(\Omega_i)) \end{cases}$$

其中

$$a_{\Omega_i}(u, v) = \int_{\Omega_i} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx$$

$$j_{\Omega_i}(v) = \int_{\Omega_i} |\operatorname{grad} v| dx$$

$$(f, v)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} f v dx$$

定理 8.5 设 $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ 且

(8.32) 在 Ω_2 内 p.p. $f_2 \geqslant 0$，在 Ω_1 内 p.p. $f_2 \geqslant f_1$

则

(8.33) 在 Ω_1 内 p.p. $u_1 \leqslant u_2$

证明 在对 $i = 1$ 的 (8.31) 中令

$$v = u_1 - (u_2 - u_1)^-$$

(这是合理的，因为在 Ω_1 的边界 Γ_1 上根据 (8.32) 和定理 8.4 有 $u_1 = 0$，$u_2 \geqslant 0$，$(u_2 - u_1)^- = 0$，故在 Γ_1 上 $v = 0$)；即得

(8.34) $$\mu a_{\Omega_1}(u_1, -(u_2 - u_1)^-) + g(j_{\Omega_1}(u_1 - (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_1}(u_1)) \geqslant -(f_1, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1}$$

现设 $\tilde{u}_1 = u_1$ 到 Ω_2 上的延拓，在 Ω_1 外取零值，则 $\tilde{u}_1 \in H_0^1(\Omega_2)$，令

(8.35) $$v = u_2 + (u_2 - \tilde{u}_1)^-$$

则有 $v \in H_0^1(\Omega_2)$，于是可在对 $i = 2$ 的 (8.31) 中取这个 v，由于在 $\Omega_2 - \bar{\Omega}_1$ 上 $v = u_2$，故

(8.36) $$\mu a_{\Omega_1}(u_2, (u_2 - u_1)^-) + g(j_{\Omega_1}(u_2 + (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_1}(u_2)) \geqslant (f_2, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1}$$

注意到

$$j_{\Omega_1}(u_1 - (u_2 - u_1)^-) + j_{\Omega_1}(u_2 + (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_1}(u_1) - j_{\Omega_1}(u_2) = 0$$

则由 (8.34) 和 (8.36) 推知

$$\mu a_{\Omega_1}(u_2 - u_1, (u_2 - u_1)^-) \geqslant (f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1}$$

由此

(8.37) $$\mu a_1((u_2 - u_1)^-) + (f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1} \leqslant 0$$

而由 (8.32) 的第二个条件有

$$(f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1} \geqslant 0$$

于是 (8.37) 蕴涵 $a_{\Omega_1}((u_2-u_1)^-) = 0$，故在 Ω_1 上 $(u_2-u_1)^-=0$ (因为 $(u_2 - u_1)^- \in H_0^1(\Omega_1)$)．□

9. 带乘子的不等方程的解释

往证下列结果

定理 9.1 保持定理 3.1 的假设；以 u_g 表示问题的解，则存在函数 $m^g = \{m_{ij}^g\}$ 和 Q 上的广义函数 p^g，满足

(9.1) $\qquad m_{ij}^g \in L^\infty(Q),\ m_{ij}^g = m_{ji}^g,\ \forall i,j,\ m_{kk}^g = 0$

(9.2) $\qquad m_{ij}^g m_{ij}^g \leqslant 1$ 在 Q 上 p.p.，

(9.3) $\qquad m_{ij}^g D_{ij}(u_g) = (D_{ij}(u_g)D_{ij}(u_g))^{1/2}$ 在 Q 上 p.p.

(9.4) $\qquad \partial u_{gi}/\partial t - \mu\Delta u_{gi} + u_{gj}\partial u_{gi}/\partial x_j - g\sqrt{2}\,\partial m_{ij}^g/\partial x_j$
$\qquad\qquad = f_i - \partial p^g/\partial x_i,\quad i = 1, 2$

反之，若给定 u_g, m_{ij}^g, p^g 满足

(9.5) $\qquad u_g \in L^2(0, T; V),\ u_g' \in L^2(0, T; V')$

(9.6) $\qquad u_g(0) = u_0$

和关系 (9.1)—(9.4)，则 u_g 是定理 3.1 问题的解．

下列定理指出"乘子" m_{ij}^g 在一适当的拓扑下连续依赖于 g．

定理 9.2 若 $g \to g_0 (g_0 \geqslant 0)$，可选乘子 m_{ij}^g 满足

(9.7) $\qquad m_{ij}^g \to m_{ij}^{g_0}$，在 $L^\infty(Q)$ 中弱*[1]

其中 $m_{ij}^{g_0}$ 是相应 u_{g_0} 的乘子（从而有上述定理 9.1 中给定的相应性质）．□

定理 9.1 的证明．首先验证定理 9.1 叙述的逆性质．从 (9.4) 推出

$$(u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) + gj(v) - gj(u(t)) - (f(t), v - u(t))$$
$$= g[j(v) - j(u) - \sqrt{2}(m_{ij}^g, D_{ij}(v) - D_{ij}(u))] = X$$

---

1) 若 $g_0 = 0$，则 $m_{ij}^{g_0} = 0$．

而由 (9.3), $j(u)=\sqrt{2}(m_{ij}^g, D_{ij}(u))$,由 (9.2)

$$\sqrt{2}(m_{ij}^g, D_{ij}(v)) \leqslant \sqrt{2}\int_\Omega (D_{ij}(v)D_{ij}(v))^{1/2}dx = j(v)$$

故 $X \geqslant 0$, 由此即得结果. □

现证明乘子 m_{ij}^g 的存在性.

为简化书写,暂略去指标 g. 引入由

(9.8) $\quad b(u, v, w)=(B(u, v), w),\ u, v, w \in V$

定义的 $B(u,v)\in V'$. 又令

(9.9) $\quad F=\partial u/\partial t-\mu\Delta u+B(u, u)-f$

F 是 $L^2(0, T; V')$ 中的元素,变分不等方程即可写成

(9.10) $\quad (F(t),v)+gj(v)-[(F(t),u(t))+gj(u(t))]\geqslant 0,$

$\forall v\in V$ 用 $\pm\lambda v$, $\lambda>0$ 代替 v, (9.10) 等价于

(9.11) $\quad \lambda[\pm(F(t),v)+gj(v)]-[(F(t),u(t))+gj(u(t))]\geqslant 0$

在 (9.11) 中取 $v=v(t)$,这里 $t\to v(t)$在 $L^2(0,T; V)$ 中,即推出

(9.12) $$\left|\begin{array}{l}\lambda\left[\pm\int_0^T(F,v)dt+g\int_0^T j(v)dt\right]-\left[\int_0^T((F,u)+gj(u))dt\right]\geqslant 0\\ \forall v\in L^2(0, T; V),\ \forall\lambda\geqslant 0\end{array}\right.$$

由此式推出

(9.13) $\quad \left|\int_0^T(F, v)dt\right|\leqslant g\int_0^T j(v)dt,\ \forall v\in L^2(0, T; V)$

和

(9.14) $$\int_0^T((F, u)+gj(u))dt=0$$

(事实上,由 (9.12) 推出 $\int_0^T((F, u)+gj(u))dt\leqslant 0$, 又根据 (9.13)

$$\int_0^T((F, u)+gj(u))dt\geqslant 0,$$ 即得 (9.14))

现在要援引 Hahn-Banach 定理. 引入空间

$$\Phi=\{\varphi|\varphi=\{\varphi_{ij}\},\ \varphi_{ij}=\varphi_{ji},\ \varphi_{ij}\in L^1(Q)\}$$

赋以范数

(9.15) $$\|\varphi\|_\Phi = \int_Q (\varphi_{ij}\varphi_{ij})^{1/2} dx\, dt$$

考虑从 $L^2(0, T; V) \to \Phi$ 的映射

(9.16) $$v \xrightarrow{\pi} D_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{ij} + v_{j,i})$$

不等式 (9.13) 等价于

(9.17) $$\left|\int_0^T (F, v) dt\right| \leqslant g\sqrt{2}\ \|\pi v\|_\Phi$$

因此根据 Hahn-Banach 定理,存在

$$m^g \in \Phi' = \{\varphi \mid \varphi = \{\varphi_{ij}\},\ \varphi_{ij} = \varphi_{ji},\ \varphi_{ij} \in L^\infty(Q)\}$$

使得

(9.18) $$\int_0^T (F, v) dt = -g\sqrt{2}\int_Q m_{ij}^g D_{ij}(v) dx\, dt$$

(甚至可在 Φ' 中取 $\{m_{ij}^g\}$, 使 $m_{kk}^g = 0$, 因为 $D_{kk}(v) = 0$, 以下我们正是如此选取 $\{m_{ij}^g\}$)

并且

(9.19) $\|m^g\|_{\Phi'} \leqslant 1$, Φ' 赋以 (9.15) 的对偶范数

而 (9.19) 等价于 (9.2), (9.18) (根据 F 的定义) 等价于 (9.4), (9.14) (利用 (9.18)) 等价于

(9.20) $$\int_Q m_{ij}^g D_{ij}(u) dx\, dt = \int_Q (D_{ij}(u) D_{ij}(u))^{1/2} dx\, dt$$

由于 (9.2), 从 (9.20) 即推出 (9.3). ▯

注 9.1 令

$$\sigma_{ij}^g = -p^g\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(u) + g\sqrt{2}\ m_{ij}^g$$

则直接有,(9.2), (9.3) 等价于: $\{\sigma_{ij}^g\}$ 和 $\{D_{ij}(u)\}$ 由 Bingham 流体特性定律联系. 并且 (9.4) 等价于:

$$\partial u_{gi}/\partial t + u_{gj} u_{gi,j} = \sigma_{ij,j} + f_i$$

这就确立了 σ_{ij}^g 是问题的应力场的解.

这也就是变分问题 (2.7) 解 $u(x, t)$ 的确切解释. (在注 2.2 中曾给出过一个形式的解释.) ▯

定理 9.2 的证明。根据定理 3.2 知道,当 $g \to g_0$ 时有

(9.21) $u_g \to u_{g_0}$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中弱,在 $L^\infty(0,T;H)$ 中弱*

此外由定理 5.1 的类似结果(用 $g \to g_0$ 代替 $g \to 0$) 有

(9.22) $\partial u_g/\partial t \to \partial u_{g_0}/\partial t$, 在 $L^2(0,T;V')$ 中弱

根据 (9.2) 可取子列,仍记 m_{ij}^g 使

(9.23) $m_{ij}^g \to \mu_{ij}$ 在 $L^\infty(Q)$ 中弱*

并且

(9.24) $\mu_{ij}\mu_{ij} \leqslant 1$, 在 Q 中 p.p.

从 (9.4) 推出

(9.25)
$$(u_g', v) + \mu a(u_g, v) + b(u_g, u_g, v) - (f, v) = -2g(m_{ij}^g, D_{ij}(v))$$

在 (9.25) 可对 g 取极限;便得

(9.26)
$$(u_{g_0}', v) + \mu a(u_{g_0}, v) + b(u_{g_0}, u_{g_0}, v) - (f, v) = -2g_0(\mu_{ij}, D_{ij}(v))$$

但 u_{g_0} 是对应 g_0 的变分不等方程的解,故

$$(u_{g_0}', v - u_{g_0}) + \mu a(u_{g_0}, v - u_{g_0}) + b(u_{g_0}, u_{g_0}, v - u_{g_0}) - (f, v - u_{g_0}) + g_0 j(v) - g_0 j(u_{g_0}) \geqslant 0$$

比较 (9.26) 即得

$$g_0\{j(v) - j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(v - u_{g_0}))\} \geqslant 0, \ \forall v$$

故

(9.27) $j(v) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(v)) - [j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0}))] \geqslant 0$

取 $v = 0$, 即得

$$j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) \leqslant 0$$

而由 (9.24) $j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) \geqslant 0$, 故

$$j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) = 0$$

故

(9.28) $\mu_{ij}D_{ij}(u_{g_0}) = (D_{ij}(u_{g_0})D_{ij}(u_{g_0}))^{1/2}$,在 Q 内 p.p

因此可令 $m_{ij}^{g_0} = \mu_{ij}$. □

注 9.2 对本章稳定的不等方程有类似结果. □

10. 评　　述

许多著作中出现不可压缩粘性牛顿流体的动力学方程.

从"数学"观点看，可参见 J. Leray[1]，[2]，[3]，O. A. Ladyzenskaya[1]，J. Serrin[1]，R. Finn[1]，Lions-Prodi[1]，Lions[1].

从"力学"观点看，在 R. Berker[1] 中有显式解的十分详尽的研究和更早的文献.

这里第 1 至 7 节的内容看来是新的(有关这一主题，我们曾在 C. R. 上发表过一个注记，Duvaut-Lions[4]).

从力学观点看，这里涉及从通常问题到非 Newton 流体的推广；Bingham 流体的选取，是由于它是导出变分不等方程的最简单情形. 其它类型的非 Newton 流体的相应问题可能也可用本书的方法处理，但这里我们未涉及.

从数学观点看，这里涉及通常问题的一个推广. 自然可提出如下问题：尽可能把对 Navier-Stokes 方程的所有已知结果推广到与 Bingham 流体相关的不等方程. 这是相当繁重的工作，对此主题的研究正在进行，下列问题在本章未论及：

1) 不等方程关于 t 的局部和强解的研究；

2) 当 $t\to+\infty$ 时解的特性；

3) 当 $\mu\to 0$ 时解的特性；极限层理论；

4) (关于 t 的)周期或概周期解的寻求；

5) 关于 Navier-Stokes 方程的 C. Foias 和 G. Prodi 的工作[1]，[2]的可能的推广；

6) 湍流理论的采用.

解的数值逼近的研究在 Fortion[1]，D. Bégis[1]，R. Glowinski[1]和已指出过的 Glowinski-Lions-Trémolières 的著作[1]中给出.

第七章　Maxwell 方程.天线问题

本章假定读者了解第一章第 1—3 节.

1. 引　　言

在一可极化介质中的 Maxwell 方程,或与 Maxwell 方程耦合的 Bingham 流体力学所建立的 (Bingham) 电磁流体力学中,电磁现象可以导出变分不等方程,后一种可能性曾在 Duvaut-Lions[7] 中论及. 本章研究与 Maxwell 方程联系的单侧现象. 由于缺乏可供参考的经典电磁现象的统一介绍,我们在第 2 节中建立电磁现象的方程,在 4,5,6 节对古典解进行数学研究. 这研究对以后处理可极化介质的 Maxwell 方程是不可缺少的. 第 3 节是待考虑的物理问题的介绍.

2. 电 磁 定 律

电磁定律来自于

i) 物理概念(电荷, 电流密度), 这里只引进这些概念而不作实验上的解释, 对此可参见经典著作 (Panotsky-Phillips[1], G. Bruhat[1]);

ii) 普适定律(电荷守恒, Faraday 定律),我们要叙述它们,并表达成数学形式 (P. Germain[3]);

iii) 每一介质的特性定律.

若所考虑的介质是静止的, 则由这些定律的组合而导出 Maxwell 方程. 在处于运动状态的连续介质情形则导出流体的磁动力学方程.

2.1 物理量

我们引进下列概念:

电荷: 用数量 E 表示，视情况的不同，它将是电荷的体、面或线密度;如不加说明,则指体密度.

电流: 这是 $\mathbf{R}^3$ 中一测量电荷流的向量 $\mathbf{J}$: 沿一曲面元 dS 的单位法向量 $\mathbf{n}$ 穿过 dS 的电荷流由内积 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS$ 给定. 向量 $\mathbf{J}$ 还称为流密度向量.

磁感: 这是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{B}$,它出现在 Faraday 定律中.

磁场: 这是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{H}$.

其它物理量将在下面的叙述中引进.

2.2 电荷守恒

对任意 $\mathbf{R}^3$ 中边界 $\partial\mathscr{D}$ 正则的区域 $\mathscr{D}$，在 $\mathscr{D}$ 中全部电荷在单位时间内的变化，来自穿过 $\partial\mathscr{D}$ 的电荷流和单位时间、单位体积内电荷的体增加量 g，这可表为

$$(2.1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{D}} q dx = -\int_{\partial\mathscr{D}}\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{\mathscr{D}} g dx$$

这里 $\mathbf{n}$ 是 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 上的单位外法向量.

(2.1) 对任意$\mathscr{D}$有效，由此推出，在每一点有

$$(2.2)\qquad \partial q/\partial t + \mathrm{Div}\mathbf{J} = g \quad \square$$

引入向量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{G}$,使

$$(2.3)\qquad q = \mathrm{Div}\mathbf{D}$$

$$(2.4)\qquad g = \mathrm{Div}\mathbf{G}$$

$\mathbf{D}$ 是电位移向量或电荷的势.

那么方程 (2.2) 表明，向量 $\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \mathbf{G}$ 的散度为零，于是至少存在一向量 $\mathbf{H}$ 使

$$(2.5)\qquad \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \mathrm{Rot}\mathbf{H} = \mathbf{G}$$

若电荷的体源 g 是零，可取 $\mathbf{G} = 0$，则方程 (2.5) 给出

$$(2.6)\qquad \int_\Sigma (\partial \mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J})\cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}$$

其中 Σ 是一 $\mathbf{R}^3$ 中的边界为 $\partial\Sigma$ 的二维流形（Σ 上的向量 $\mathbf{n}$ 确定边界 $\partial\Sigma$ 的定向，其无穷小切向量是 $d\mathbf{s}$）.

关系式 (2.6) 称为 Ampère 定理. □

注 2.1 向量 $\mathbf{G}$，若不计一旋转场的差别，则是确定的. $\mathbf{G}$ 的选取直接影响磁场值. □

注 2.2 若向量场 $\mathbf{D}$ 在穿过单位法向量为 $\mathbf{n}$ 的曲面 Σ 时不连续且区域 $\mathscr{O}$ 被 Σ 分割成两个子域 $\mathscr{O}_1$ 和 $\mathscr{O}_2$，$\mathbf{n}$ 指向 $\mathscr{O}_2$，则我们有

$$(2.7)\qquad \int_{\partial\mathscr{O}_1} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n} dS = \int_{\mathscr{O}_1} q dx$$

$$(2.8)\qquad \int_{\partial\mathscr{O}_2} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n} dS = \int_{\mathscr{O}_2} q dx$$

$$(2.9)\qquad \int_{\mathscr{O}} q\cdot dx = \int_{\mathscr{O}_1} q dx + \int_{\mathscr{O}_2} q dx + \int_{\Sigma\cap\mathscr{O}} q d\Sigma = \int_{\partial\mathscr{O}} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n} dS.$$

比较之即得

$$(2.10)\qquad \int_{\Sigma\cap\mathscr{O}} q d\Sigma = -\int_{\Sigma\cap\mathscr{O}} \mathbf{D}^{(1)}\cdot\mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Sigma\cap\mathscr{O}} \mathbf{D}^{(2)}\cdot\mathbf{n} d\Sigma$$

这关系对任意的 Σ 和 $\mathscr{O}$ 都成立，由此推出，在 Σ 上的每点有

$$(2.11)\qquad (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)})\mathbf{n} = q$$

在这一关系中，指标 (1) 和 (2) 对应区域 $\mathscr{O}_1$ 和 $\mathscr{O}_2$，q 表示 Σ 上的电荷面密度. 同样还要明确，在方程 (2.9) 中，左端 $\int_{\mathscr{O}} q dx$ 表示 $\mathscr{O}$ 内所有电荷的和，即 $\mathscr{O}_1$ 和 $\mathscr{O}_2$ 内的体电荷和在 $\Sigma\cap\mathscr{O}$ 上的面电荷之和.

从方程 (2.5) 出发基于关系式

$$(2.12)\qquad \int_{\mathscr{O}} \mathrm{rot}\mathbf{V} dx = \int_{\partial\mathscr{O}} \mathbf{n}\wedge\mathbf{V} dS$$

的完全类似的推理给出

$$(2.13)\qquad \mathbf{n}\wedge(\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{J}$$

其中 $\mathbf{J}$ 表示 (Σ_t) 上电流的面密度.

注意，若在广义函数意义下理解 (2.3)，(2.5)，则方程 (2.11) 和 (2.13) 包含在 (2.3) 和 (2.5) 中。 □

2.3 Faraday 定律

穿过边界为 $\partial\Sigma$ 的一曲面 Σ 的磁感应通量对时间的导数和电场沿周界 $\partial\Sigma$ 的环量反号.

这一定律可解析地表为

(2.14)
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}d\Sigma+\int_{\partial\Sigma}\mathbf{E}\cdot ds=0$$

当 Σ 是一开集 $\mathscr{D}$ 的边界的封闭曲面时，则由 (2.14) 推出

(2.15)
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{D}}\mathrm{Div}\mathbf{B}dx=0$$

即在每点有

(2.16)
$$\partial(\mathrm{Div}\mathbf{B})/\partial t=0$$

若设在 0 时刻 t_0 场 $\mathbf{B}_0$ 满足 $\mathrm{Div}\mathbf{B}_0=0$，则在所有时刻 t

(2.17)
$$\mathrm{Div}\mathbf{B}=0$$

方程 (2.14) 还提供逐点的关系：

(2.18)
$$\partial\mathbf{B}/\partial t+\mathrm{rot}\mathbf{E}=0$$

它严格包含 (2.16)。 □

注 2.3 若 Σ 是对场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的可能的不连续面，仿注 2.2，我们可证明

(2.19)
$$(\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)})\cdot\mathbf{n}=0$$

(2.20)
$$\mathbf{n}\wedge(\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)})=0$$ □

注 2.4 若引进一个相对原坐标系以速度 $\mathbf{V}_0$ 作平移的新坐标系，并利用

$$q'=q\quad \mathbf{J}'=\mathbf{J}-q\mathbf{V}_0$$
$$\mathbf{D}'=\mathbf{D}\quad \mathbf{E}'=\mathbf{E}+\mathbf{V}_0\wedge\mathbf{B}$$
$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}\quad \mathbf{H}'=\mathbf{H}-\mathbf{V}_0\wedge\mathbf{D}$$

定义在新坐标中的新的电磁量，容易看到，Maxwell 方程 (2.5)，(2.18)，更不待说 (2.3) 和 (2.17) 在新坐标系中仍保持有效。这

些方程有 Galileo 不变性。

2.4 摘要. Maxwell 方程

以下含 9 个方程的组称为 **Maxwell** 方程:

(2.21) $$\partial \mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{G}$$

(2.22) $$\partial \mathbf{B}/\partial t + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$$

(2.23) $$\mathrm{Div}\mathbf{D} = q$$

(2.24) $$\mathrm{Div}\mathbf{B} = 0$$

现阶段，方程(2.23)可看作电荷 q 的定义，而方程(2.24)是(2.22)和在某一特殊时刻 $\mathrm{Div}\mathbf{B} = 0$ 假设的一推论.

此外,若在(2.21)中取散度,则可得电荷守恒方程.

因此(2.21)和(2.22)是基本的 Maxwell 方程. 假定向量 $\mathbf{G}$ 已知,这些方程组成向量 $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ 的分量，即十五个未知函数间的六个数量关系. 显然，这方程组对于电磁现象的预报是不充分的. 这说明必须引进不太普遍的适用于各种连续介质的特性定律.

2.5 特性定律

我们要考虑两组特性定律:

i) 场和感应成比例性: 此定律可表为

(2.25) $$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

(2.26) $$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

其中 ε 是介电常数，μ 是磁导率. 假定这些数值不依赖介质中的电磁现象,故这是线性定律.

ii) Ohm 定律: 若介质是“稳定的”，即具有一不依赖于电磁量的电阻率 σ. Ohm 定律有关系

(2.27) $$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

若介质在电场作用下是“可离子化的”，则其电阻率 σ 将随电场显著改变,Ohm 定律应代以下列关系

$$(2.28)\quad \begin{cases} \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \text{ 当 } |\mathbf{E}| < E_0 \\ \mathbf{J} = (\sigma + \lambda)\mathbf{E}, \text{ 当 } |\mathbf{E}| = E_0 \end{cases}$$

这里正常数 E_0 是电离的临界值，λ 是一个适当的正数或零。

这种特性在强电场作用下的气体中遇到，这时发生电弧或天线击穿现象。□

注 2.5 数学定律(2.28)并不严格地表达实验观察到的现象。事实上，若分别以 **J** 和 **E** 表示向量 **J** 和 **E** 的模(2.28)给出了函数 $J = J(E)$ 的图象(图 21)，而由实验得到的图形则如图 22 所示。可是我们将保留定律(2.28)，因为实际上的图形(图 22)显示了电离的延迟现象，它对应于物理上的不稳定性。

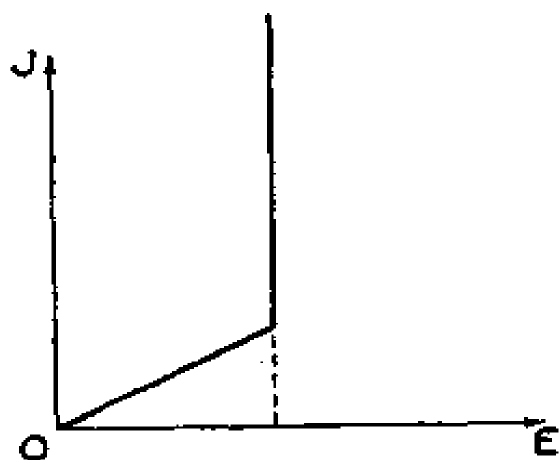


图 21

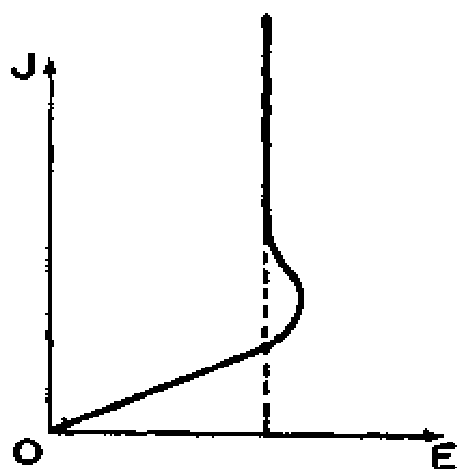


图 22

注 2.6 方程(2.25)和(2.26)不具有 Galilèo 不变性。因此一般必须在一固定坐标系或者至少在相同的坐标系中应用它们。

在 Duvaut-Lions [7] 中，对磁流体动力学的特殊情形，这些定律应当应用于与流体同时运动的局部坐标系中。于是必须提出一些简化假设，以使这些关系有 Galilèo 不变性。

注 2.7 特性定律组成联系十五个未知函数的九个补充关系。再加上 Maxwell 定律，我们有与未知函数相同数目的方程。

3. 待考虑的物理问题

3.1 带超导边界的稳定介质

设有 R^3 的一边界 Γ 有界且正则的区域 Ω. 开集 Ω 有界或无界. 要求向量场 $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}$ 满足

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \text{在}\Omega\text{内}\ \ \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}) = \mathbf{G}_1 \\ \text{在}\Omega\text{内}\ \ \partial\mathbf{B}/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2 \end{cases}$$

其中右端的 $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ 满足

$$(3.2)\qquad \mathrm{Div}\mathbf{G}_2 = 0,\ \ \mathbf{G}_2\cdot\mathbf{n} = 0$$

(我们把 (2.21) 和 (2.22) 右端对称化),且令

$$(3.3)\qquad \hat{\mu} = 1/\mu,\ \ \hat{\varepsilon} = 1/\varepsilon$$

这些量 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\mu}$ 严格正且保持有界;它们可能依赖于 x,特别可能分块地是常数。

我们有初条件

$$(3.4)\qquad \mathbf{B}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{B}_0(x),\ \ \mathbf{D}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{D}_0(x)$$

并回忆起 $\mathrm{Div}\mathbf{D} = q$, $\mathrm{Div}\mathbf{B} = 0$

(3.1) 至 (3.4) 对所有要考虑的问题普遍适用。

"稳定介质"的假定等价于 Ohm 定律.

$$(3.5)\qquad \text{在}\Omega\text{内}\ \ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D}$$

而超导边界要求在 Γ 上的条件为

$$(3.6)\qquad \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = 0,\ \ \mathbf{D}\wedge\mathbf{n} = 0$$

我们假定初值 $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{D}_0$ 亦遵从这些条件; 于是 (3.6) 中关于 $\mathbf{B}$ 的条件就包含在 (3.1) 和 (3.2) 中。

σ 作为介质的电导率是有界的正值,可依赖于 x.

3.2 带超导边界的可极化介质

除了 (3.5), 方程和条件与 3.1 节问题相同, (3.5) 应代以 (2.28),用 $\mathbf{D}$ 可得

$$(3.7)\qquad \begin{cases} |\mathbf{D}| < \mathscr{D}_0 \Rightarrow \mathbf{J} = \sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D} \\ |\mathbf{D}| = \mathscr{D}_0 \Rightarrow \exists\lambda \geqslant 0 \text{ 使 } \mathbf{J} = (\sigma\hat{\varepsilon} + \lambda)\mathbf{D} \\ (\mathscr{D}_0 = \varepsilon E_0) \end{cases}$$

E_0是一正常数，称为击穿界限或击穿强度．它可用平板电容器说明：当给电容器充电时，在板之间产生一强度增加的．电场 $\mathbf{E}$，而当场强增大到 E_0 时，使板间的电介质电离；因而电介质突然变为导体，并使电流通过，电容器放电，从而毁坏了电容器．类似的现象可在天线中发生：若天线产生的电场过强，空气变成电离状态而成为导体，则大量电流通过天线使它毁坏．这就是天线击穿现象（当然应避免）．□

(3.7) 中的电导率 σ 若不是零，也总是很小的．

注 3.1 在上述每一问题中，可把边条件 (3.6) 换成

$$(3.8)\qquad \mathbf{D}\cdot\mathbf{n} = 0,\ \mathbf{B}\wedge\mathbf{n} = 0$$

但由此得到的问题从物理上看似乎意义不大．不过下述情况很容易用于 (3.8)

3.3 双极天线

开集 Ω 是全空间 $\mathbf{R}^3$，考虑 $\mathbf{R}^3$ 的两个分离的开集 Ω_1 和 Ω_2（见图 23），且它们都是放电体．设 $g(x, t)$ 是 Ω_1 和 Ω_2 内单位时间内提供的电荷体密度．



图 23

取 Γ 为空集并确定方程 (3.1) 右端项 G_1 和 G_2 之后就可提出联系 3.1 节和 3.2 节的问题，$\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 的确定可参见注 2.1．□

$\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 的确定

取 $\mathbf{G}_2 = 0$，这不产生困难。

函数 $\mathbf{G}_1$ 应满足

$$\mathrm{Div}\mathbf{G}_1 = g \tag{3.9}$$

函数 g 表示在 Ω_1 和 Ω_2 上给定的放电量。在 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 的补集上令 g 取零，从而把 g 延拓到 $\mathbf{R}^3$，令空间在每一时刻应保持中性，即

$$\int_{\mathbf{R}^3} g(x, t)dx = 0, \ \forall t \tag{3.10}$$

条件 (3.10) 是方程

$$\Delta\Phi + g = 0, \ \mathbf{R}^3 \text{ 内} \tag{3.11}$$

可积性条件。这使我们在满足 (3.9) 的所有函数 $\mathbf{G}_1$ 中选取旋度为零的一个，即

$$\mathbf{G}_1 = -\mathrm{grad}\Phi \tag{3.12}$$

其中 Φ 是 (3.11) 的解。□

于是在介质稳定时，双极天线问题是 3.1 问题的特殊情形；在介质可极化时，是 3.2 问题的特殊情形。

3.4 裂缝天线. 电磁波被超导体的绕射

下列问题经常提出：设 $\{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一电磁波，即右端为零的稳定且一般是均匀的介质中的 Maxwell 方程的解，若在 $\mathbf{R}^3$ 中引入一超导体，那么解 $\{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\}$ 受到什么样的扰动？这就是电磁波被一超导体绕射的问题。裂缝天线可用一个类似的现象描述。开集 Ω 将是一有界超导物体 $\mathscr{S} = \bar{\Omega}$ 的外部，设在 Ω 内的一曲线弧 $\widehat{AB}$ 上给定了一偶极子分布(图 24)。若没有 $\mathscr{S}$，给定的电偶极子分布在 $\mathbf{R}^3$ 中放射出电磁波 $\{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\}$，这易于写出，因这里涉及的只是偶极子分布。

超导体 $\mathscr{S}$ 的出现扰动了波 $\{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\}$，这使我们要处理绕射现象。

方程的建立. 令

$$\{\mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)}\} = \{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\} + \{\mathbf{B} + \mathbf{D}\} \tag{3.13}$$

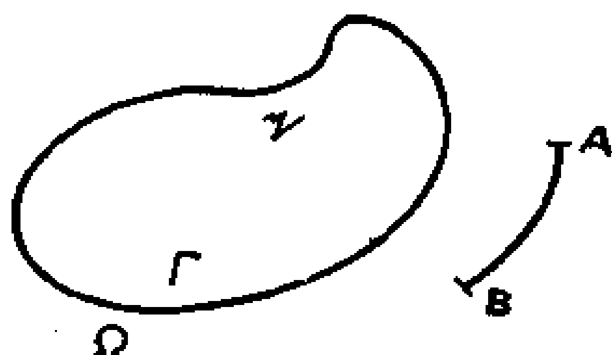


图 24

其中 $\{\mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)}\}$ 是有超导体时的解．电磁波 $\{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}\}$ 和 $\{\mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)}\}$ 满足右端为零的 Maxwell 方程，由于方程是线性的，$\{\mathbf{B}, \mathbf{D}\}$ 亦然，即

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \partial\mathbf{D}/\partial t + \sigma\tilde{\varepsilon}\mathbf{D} - \operatorname{Rot}(\tilde{\mu}\mathbf{B}) = 0 \\ \partial\mathbf{B}/\partial t + \operatorname{Rot}(\tilde{\varepsilon}\mathbf{D}) = 0 \end{cases}$$

在超导体边界 Γ 上

$$(3.15)\qquad \mathbf{B}^{(2)}\cdot\mathbf{n} = 0,\quad \mathbf{D}^{(2)}\wedge\mathbf{n} = 0$$

由此推出

$$(3.16)\qquad 在\ \Gamma\ 上\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{B}^{(1)}\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{D}\wedge\mathbf{n} = -\mathbf{D}^{(1)}\wedge\mathbf{n}$$

我们补充方程 (3.14) 和 (3.16) 以初条件

$$(3.17)\qquad \mathbf{B}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{B}_0(x),\quad \mathbf{D}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{D}_0(x)$$

$\mathbf{B}_0$ 满足

$$(3.18)\qquad \operatorname{Div}\mathbf{B}_0(x) = 0\ \square$$

3.5 摘要．问题的统一提法

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一有界或无界[1]开集，其边界 Γ 有界[2]且正则(例如 Γ 是二维一次连续流形，Ω 局部地在 Γ 的单侧)．

记 $\bar{\Omega} = C(\Omega)$(在 3.4 $\bar{\Omega} = \mathscr{V}$)．在 Ω 内给定函数 ε 和 μ，它们分块是常数[3]；更确切地，我们假定

---

1) 在 3.1 和 3.2 的问题中 Ω 有界，在其余情形无界．

2) 或空集．

3) 可以推广为分块正则函数．我们明确假定在 Γ 的邻域内，ε 是常数．

(3.19) $\begin{cases} \text{在 } \Omega_i \text{ 内 } \varepsilon=\varepsilon_i,\ \mu=\mu_i,\ i=1,\cdots,q^{1)} \\ \varepsilon_i>0,\ \mu_i>0 \end{cases}$

假定 Ω_i 和 Ω_j 的公共边界 Σ_{ij}（见图 25）有界且正则。

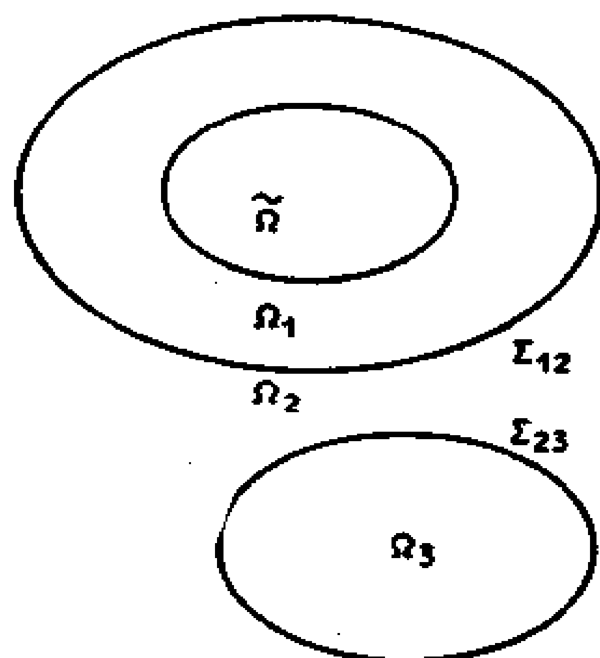


图 25

要求向量场 **B** 和 **D**，满足

(3.20) $$\partial \mathbf{D}/\partial t+\mathbf{J}-\operatorname{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B})=\mathbf{G}_1$$

(3.21) $$\partial \mathbf{B}/\partial t+\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D})=\mathbf{G}_2$$

(3.22) $$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } \mathbf{n}\wedge\mathbf{D}=0$$

(3.23) $$\text{在 } \Omega \text{ 上 } \mathbf{B}(0)=\mathbf{B}_0,\ \mathbf{D}(0)=\mathbf{D}_0$$

其中用记号 (3.3) ($\hat{\mu}=1/\mu$, $\hat{\varepsilon}=1/\varepsilon$)。

在稳定介质中

(3.24) $$\mathbf{J}=\sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D}$$

在可极化介质中

(3.25) $\begin{cases} \mathbf{J}=\sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D},\ \text{当 } |\mathbf{D}|<\mathscr{D}_0 \text{（正常数）} \\ \mathbf{J}=(\sigma+\lambda)\hat{\varepsilon}\mathbf{D},\ \text{对某一适当的 } \lambda\geqslant 0,\ \text{当 } |\mathbf{D}|=\mathscr{D}_0 \text{ 时} \end{cases}$

注 3.2 在叙述中"取消"了下述的条件：

1) 在双极天线情形，$q=2$。

在Γ上 $\text{Div}\mathbf{B}=0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=0$,等等

它们将作为上述问题解的性质而出现,只要给定值 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{B}_0,\mathbf{D}_0$ 是"适当的". □

注 3.3 在界面 Σ_{ij} 上的条件是方程的推论,这些方程是在 Ω 上的广义函数意义下理解的(见注 2.2). □

指南 第 4 至 7 节研究稳定介质,第 8 节研究可极化介质.然后研究对应"裂缝天线"的非均匀问题.

4. 稳定介质的研究. 第一个存在唯一性定理

4.1 对于问题的"弱"提法的泛函分析工具

关于记号的注记. 除主要结果叙述外,向量均以非粗体字母书写.

空间 $H(\text{Rot};\Omega)$. 引入

(4.1) $$H(\text{Rot};\Omega)=\{v\mid v\in(L^2(\Omega))^3,\text{Rot}v\in(L^2(\Omega))^3\}$$

赋以(图象)范数

(4.2) $$(\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|\text{Rot}v\|^2_{(L^2(\Omega))^3})^{1/2}$$

空间 $H(\text{Rot};\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

引理 4.1 假定 Ω 有一正则且有界的边界 Γ: 设 $(C^1_K(\bar\Omega))^3$ 是在 $\bar\Omega$ 上一次连续可微且带 $\bar\Omega$ 内的紧支集(当 Ω 有界时,这自然满足)的向量函数空间,则 $(C^1_K(\bar\Omega))^3$ 在 $H(\text{Rot},\Omega)$ 内稠密.

证明. 算子"Rot"是一阶微分系,因而若 $v\in H(\text{Rot},\Omega)$ 且 $\varphi\in\mathscr{D}(\bar\Omega)$,则 $\varphi v\in H(\text{Rot};\Omega)$.

设 $\phi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 且在原点的一邻域内 $\phi=1$,而 ϕ_M 定义为

$$\phi_M(x)=\phi(x/M)$$

ϕ_M 在 $\bar\Omega$ 上的限制仍记为 ϕ_M,则有

$$\text{若 } v\in H(\text{Rot};\Omega),\ \text{则 } \phi_M v\in H(\text{Rot};\Omega)$$

并且不难验证

$$\text{当 } M\to+\infty,\ \phi_M v \text{ 在 } H(\text{Rot};\Omega) \text{ 中}\to v$$

而 $\forall M$, $\phi_M v$ 在 $\bar\Omega$ 中有紧支集,于是就归结为(在 $H(\text{Rot},\Omega)$ 的意

义下)逼近一个在 Ω 有紧支集的元素 v.

引进 Γ 在 $\mathbf{R}^3$ 中一邻域的有限开覆盖 $\mathcal{O}_1,\cdots,\mathcal{O}_N$，每一 $\mathcal{O}_i$ 都是具有下列性质的有界开集[1)]

$$(4.3)\quad\left|\begin{array}{l}\forall_i,\ \forall\varepsilon>0 \text{ 存在一向量 } \lambda_i\in\mathbf{R}^3,\text{满足 } |\lambda_i|<\varepsilon\\ \text{平移后的开集 } \mathcal{O}_i+\lambda_i \text{ 组成 } \Gamma \text{ 在 } \mathbf{R}^3 \text{ 中邻域的一个开覆盖}\end{array}\right.$$

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 是 Γ 在 $\mathbf{R}^3$ 中某邻域的从属于 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的一单位分解，$\alpha_i\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_i)$，则有

$$(4.4)\qquad v=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i v+v_0$$

$v_0\in H(\mathrm{Rot};\Omega)$，它有在 Ω 内的紧支集.

可(由正则化)用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的元素逼近 v_0，全部问题就归结为逼近 $\alpha_i v=w$ (i 任意固定).

引进 $\mathbf{R}^3$ 的如下的序列 t_n (见 (4.3))

$$(4.5)\quad\left|\begin{array}{l}|t_n|\to 0(n\to\infty)\\ w_n(x)=w(x-t_n)\in H(\mathrm{Rot};\Omega_n),\ \ \bar{\Omega}\subset\Omega_n\end{array}\right.$$

若

$$\varphi_n=w_n \text{ 在 } \Omega \text{ 的限制}$$

则当 $n\to\infty$ 时在 $H(\mathrm{Rot};\Omega)$ 中

$$\varphi_n\to w$$

因此问题归结为用 $(C_K^1(\bar{\Omega}))^3$ 的一序列逼近

$$\varphi_n=\phi\quad(n\ \text{固定})$$

而(根据 (4.5)) ϕ 是 $\varphi\in H(\mathrm{Rot};\Omega')(\Omega'\supset\bar{\Omega})$ 在 Ω 上的限制，若引入 $\theta\in\mathscr{D}(\Omega')$，在 $\bar{\Omega}$ 上 $\theta=1$，则有

$$(4.6)\quad\left|\begin{array}{l}\theta\varphi\in H(\mathrm{Rot};\mathbf{R}^3)\ (\text{在 } \Omega' \text{ 外延拓 } \theta\varphi \text{ 为 } 0)\\ \text{在 } \Omega \text{ 上 } \theta\varphi=\phi\end{array}\right.$$

而(由正则化)存在 $F_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^3)$，在 $H(\mathrm{Rot};\mathbf{R}^3)$ 中 $F_j\to\theta\varphi$，若 $f_j=F_j$ 在 Ω 上的限制，则由此推出在 $H(\mathrm{Rot},\Omega)$ 上 $f_j\to\phi$；由于 $f_j\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$，即得引理的证明. □

---

1) 由 Hörmander[1] 引进的一个性质的变形. 注意，存在一个这样的覆盖 $\{\mathcal{O}_i\}$.

注 4.1 上述证明是一般性的，并未用到微分系"Rot"的特殊结构。 □

引理 4.2 保留引理 4.1 的假设。设 n 是 Γ 的指向 Ω 外部的(为确定起见)法向量。从 $(C_K^1(\bar{\Omega}))^3 \to (C'(\Gamma))^3$ 的映射

$$u \to n\wedge u|_\Gamma = n\wedge u \tag{4.7}$$

由连续性可延拓为从 $H(\mathrm{Rot};\Omega) \to (H^{-1/2}(\Omega))^3$ 的线性连续映射，仍记为 $u \to n\wedge u$。

证明. 对 $\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$，令 $\Phi \in (H^1(\Omega))^3$ 满足

$$\Phi|_\Gamma = \varphi$$

映射 $\varphi \to \Phi$ 从 $(H^{1/2}(\Gamma))^3 \to (H^1(\Omega))^3$ 是线性连续的。

对 $H(\mathrm{Rot};\Omega)$ 中给定的 u，令

$$\pi(\varphi) = (\mathrm{Rot}u, \Phi) - (u, \mathrm{Rot}\Phi) \tag{4.8}$$

其中，一般有

$$(f, g) = \int_\Omega f_i g_i dx \tag{4.9}$$

记号 (4.8) 是合理的。事实上，其右端不依赖 Φ 的选取(只要 $\Phi|_\Gamma=\varphi$)；因若 Ψ 是另一向量，$\Psi \in (H^1(\Omega))^3$，$\Psi|_\Gamma=\varphi$，则 $\Phi - \Psi = \Theta \in (H_0^1(\Omega))^3$。于是

$$(\mathrm{Rot}u, \Theta) = (u, \mathrm{Rot}\Theta)$$

映射 $\varphi \to \pi(\varphi)$ 在 $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ 上线性连续，于是有

$$\begin{cases} \pi(\varphi) = (\sigma_u, \varphi)_\Gamma,\ \sigma_u \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \\ (,)_\Gamma \text{ 表示 } (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \text{ 和 } (H^{1/2}(\Gamma))^3 \text{的内积,} \\ u \to \sigma_u \text{ 从 } H(\mathrm{Rot};\Omega) \to (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \text{ 线性连续.} \end{cases} \tag{4.10}$$

而当 $u \in (C_K'(\bar{\Omega}))^3$，我们有

$$(\mathrm{Rot}u, \Phi) - (u, \mathrm{Rot}\Phi) = \int_\Gamma (n\wedge u)\varphi d\Gamma \quad (\Phi|_{\Gamma=\varphi}) \tag{4.11}$$

故

$$\text{当 } u \in (C_K'(\bar{\Omega}))^3 \text{ 时，} \sigma_u = n\wedge u$$

由此得引理。 □

引理 4.2 使得可以引进空间

(4.12) $H_0(\mathrm{Rot}; \Omega) = \{v | v \in H(\mathrm{Rot}; \Omega)$, 在 Γ 上 $n \wedge v = 0\}$
它在 $H(\mathrm{Rot}; \Omega)$ 中是闭的。

引理 4.3 保留引理 4.1 的假设。若

(4.13) $X = (C_K^1(\bar{\Omega}))^3$ 中满足在 Γ 上 $n \wedge \varphi = 0$ 的向量 φ 的空间

则 X 在 $H_0(\mathrm{Rot}; \Omega)$ 中稠密。

证明. 对 $u \in H_0(\mathrm{Rot}; \Omega)$, 令 $\tilde{u}$ 是 u 的在 Ω 外取零的延拓;则若 $\Phi \in (\mathscr{D}(\mathbf{R}^3))^3$, 我们有[1]

$$(\mathrm{Rot}\tilde{u}, \Phi)_{\mathbf{R}^3} = (\tilde{u}, \mathrm{Rot}\Phi)_{\mathbf{R}^3} = (u, \mathrm{Rot}\varphi)_\Omega$$
$$= (\mathrm{Rot}u, \varphi)_\Omega - (n \wedge u, \varphi)_\Gamma = (\mathrm{Rot}u, \varphi)_\Omega$$
$$(因在 \Gamma 上 n \wedge u = 0)$$

于是

$$\mathrm{Rot}(\tilde{u}) = \widetilde{(\mathrm{Rot}u)} \in (L^2(\mathbf{R}^3))^3$$

由此 $\tilde{u} \in H(\mathrm{Rot}; \mathbf{R}^3)$, $\tilde{u}$ 显然有支集在 $\bar{\Omega}$ 内

仿引理 4.1[2]证明,引进 $\{\mathcal{O}_i\}$, $\{\alpha_i\}$ 可记

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \tilde{u} + u_0$$

$u_0 \in H(\mathrm{Rot}; \mathbf{R}^3)$,有紧支集在 Ω 中,全部问题归结为逼近 $\alpha_i\tilde{u} = w$。

现(如同在 (4.5) 中)进行平移,但在 (4.5) 中是"向 Ω 的外部"进行平移,这里是把 w 变到"Ω 的内部": 考虑 $t_n \in \mathbf{R}^3$ 使

$$(4.14) \quad \begin{cases} |t_n| \to 0 \\ (\mathcal{O}_i \cap \Omega) + t_n \subset \Omega \end{cases}$$

定义 w_n 为

$$w_n(x) = w(x - t_n)$$

$w_n \in H(\mathrm{Rot}; \mathbf{R}^3)$, w_n 在 Ω 内有紧支集。

由正则化,(在 $H(\mathrm{Rot}; \Omega)$ 意义下) 用 $(\mathscr{D}(\Omega))^3$ 的元素逼近 w_n,即得引理。 □

注 4.2 事实上,我们证明的比引理更多,知道了

---

1) 右下角指标表示积分区域. 用 φ 表示 Φ 在 Ω 上的限制。

2) 这里严格按 Hörmander[1] 定理 1 推理。

(4.15) $(\mathscr{D}(\Omega))^3$ 在 $H_0(\mathrm{Rot};\Omega)$ 中稠密。□

4.2 算子 $\mathscr{A}$ 问题的"弱"提法

空间$\mathscr{H}$. 令

(4.16) $$\mathscr{H}=(L^2(\Omega))^6=(L^2(\Omega))^3\times(L^2(\Omega))^3$$

若 $\Phi=\{\varphi,\psi\}\in\mathscr{H}(\varphi\in(L^2(\Omega))^3,\ \psi\in(L^2(\Omega))^3)$, $\Phi_*=\{\varphi_*,\psi_*\}\in\mathscr{H}$, 则令

(4.17) $$(\Phi,\Phi_*)_{\mathscr{H}}=(\hat{\varepsilon}\varphi,\varphi_*)+(\hat{\mu}\psi,\psi_*)$$

(这里利用记号(4.9));由于函数 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\mu}$ 在Ω中有界且满足

(4.18) $$\mathrm{Inf}\,\hat{\varepsilon}>0,\quad \mathrm{Inf}\,\hat{\mu}>0$$

则内积(4.17)等价于"通常的"内积

$$(\varphi,\varphi_*)+(\psi,\psi_*)$$ □

注 4.3 当然,特殊内积(4.17)的选取并不绝对必须——因为最终的结果(定理4.1)不依赖$\mathscr{H}$上的内积;不过这种选取简化了证明,因为,比如说下面的性质(4.24)依赖于$\mathscr{H}$上的内积. □

定义域 $D(\mathscr{A})$. 为定义$\mathscr{H}$上的无界算子$\mathscr{A}$,首先确定其定义域 $D(\mathscr{A})$:

(4.19) $$D(\mathscr{A})=\{\Phi|\Phi=\{\varphi,\psi\}\in\mathscr{H},\ \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)\in(L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\psi)\in(L^2(\Omega))^3,\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ n\wedge\varphi=0\}$$ □

注 4.4 定义(4.19)有意义;为证明这一点,必须验证 $n\wedge\varphi$ 有意义;而 $\hat{\varepsilon}$ 在 Γ 的邻域内是常数;因此有一开集 $\Omega_1\subset\Omega$(如图25),$\Gamma\subset\Omega_1$ 的边界;

(4.20) $$\varphi\in H(\mathrm{Rot};\Omega_1)$$

而 Ω_1 的边界 $\partial\Omega_1$ 包含 Γ,我们可(由引理4.2的直接变形)定义

(4.21) $$n\wedge\varphi\in(H^{-1/2}(\Gamma))^3$$

且

(4.22) 映射 $\varphi\to n\wedge\varphi$ 从 $H(\mathrm{Rot};\Omega_1)\to(H^{-1/2}(\Gamma))^3$ 线性连续. □

算子$\mathscr{A}$. 对 $\Phi\in D(\mathscr{A})$,令

(4.23) $$\mathscr{A}\Phi=\{-\mathrm{Rot}(\hat{\mu}\psi),\ \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)\}(\in\mathscr{H})$$

我们有

引理 4.4 定义域 $D(\mathscr{A})$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，$\mathscr{A}$ 是闭的，且有

$$\mathscr{A}^* = -\mathscr{A},\ D(\mathscr{A}^*) = D(\mathscr{A}) \tag{4.24}$$

证明．用 $(\pi\mathscr{D}(\Omega_i))^6$ 表示 Φ 的空间，使 Φ 在 Ω_i 上的限制 Φ^i 在 $\mathscr{D}(\Omega_i)^6$ 中，$i=1,\cdots,q$．显然，$(\pi\mathscr{D}(\Omega_i))^6$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密且含于 $D(\mathscr{A})$，故 $D(\mathscr{A})$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密．

现证 $\mathscr{A}$ 是闭的．设 $\Phi_j\in D(\mathscr{A})$，$\Phi_j=\{\varphi_j,\phi_j\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中 $\to\Phi$，又 $\mathscr{A}\Phi_j$ 在 $\mathscr{H}$ 中 $\to\Psi$，我们有在 $(L^2(\Omega))^3$ 中

$$\varphi_j\to\varphi,\ \phi_j\to\phi$$

而 $\mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi_j)$ 和 $\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_j)$ 在 $(L^2(\Omega))^3$ 中收敛；但在 $(\mathscr{D}'(\Omega))^3$ 中，$\mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi_j)\to\mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)$，$\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_j)\to\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)$，故

$$\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)\in(L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)\in(L^2(\Omega))^3$$

此外 φ_j^1（φ_j 在 Ω_1 上的限制）在 H (Rot; Ω_1) 中 $\to\varphi^1$，故（见(4.22)）$n\wedge\varphi_j^1(=0)$ 在 $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$ 中 $\to n\wedge\varphi^1$（在 Γ 上），于是在 Γ 上 $n\wedge\varphi^1=0$，从而 $\Phi\in D(\mathscr{A})$．

现注意，可用如下方式描述 $D(\mathscr{A})$：若 $\Phi=\{\varphi,\phi\}$，$\Phi^i=\{\varphi^i,\phi^i\}=\Phi$ 在 Ω_i 上的限制，则 $\mathrm{Rot}\varphi^i$, $\mathrm{Rot}\phi^i\in(L^2(\Omega_i))^3$，并且

$$\begin{cases}\text{在 }\Sigma_{ij}\text{ 上 }\ \hat{\mu}_i n\wedge\phi^i=\hat{\mu}_j n\wedge\phi^j\\ \text{在 }\Sigma_{ij}\text{ 上 }\ \hat{\varepsilon}_i n\wedge\varphi^i=\hat{\varepsilon}_j n\wedge\varphi^j,\ \text{在 }\Gamma\text{ 上 }\ n\wedge\varphi^1=0\end{cases} \tag{4.25}$$

反之，若 Φ 满足上述关系，则它属于 $D(\mathscr{A})$．

设 $\Phi_*\in D(\mathscr{A}^*)$，即 $\mathscr{H}$ 中一元素，它使线性形式 $\Phi\to(\mathscr{A}\Phi,\Phi_*)_{\mathscr{H}}$ 在 $D(\mathscr{A})$ 上对由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续．形式 $\Phi\to(\mathscr{A}\Phi,\Phi_*)_{\mathscr{H}}$ 特别在 $(\pi\mathscr{D}(\Omega_i))^6$ 上对由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续．而若 $\Phi\in(\pi\mathscr{D}(\Omega_i))^6$，则我们有

$$(\mathscr{A}\Phi,\Phi_*)=-\sum_i(\hat{\mu}_i\phi^i,\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi_*^i))_{\Omega_i}$$

$$+\sum_i(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i,\mathrm{Rot}(\hat{\mu}_i\phi_*^i))_{\Omega_i}$$

由此推出

$$\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi_*^i)\in(L^2(\Omega_i))^3,\ \mathrm{Rot}(\hat{\mu}_i\phi_*^i)\in(L^2(\Omega_i))^3$$

或

(4.26) $\quad \mathrm{Rot}\varphi^i_* \in (L^2(\Omega_i))^3, \ \mathrm{Rot}\phi^i_* \in (L^2(\Omega_i))^3$

于是(由引理 4.2) 可在 Σ_{ij} 和 Γ 上定义 $n\wedge\varphi^i_*$ 和 $n\wedge\phi^i_*$.

现取 $\Phi\in D(\mathscr{A})$,且 $\phi^i\in(C^1_k(\Omega_i))^6$, 从而满足关系 (4.25), 于是

(4.27)
$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}\Phi, \Phi_*) = & -\sum_i (\mathrm{Rot}(\hat{\mu}_i\phi^i), \hat{\varepsilon}_i\varphi^i_*)_{\Omega_i} \\
& + \sum_i (\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}_i\varphi^i), \mu_i\phi^i_*)_{\Omega_i} \\
= & -\int_{\Sigma_{ij}} (n\wedge\phi^i)\varphi^i_*\hat{\mu}_i\hat{\varepsilon}_i d\Sigma_{ij} \\
& + \int_{\Sigma_{ij}} (n\wedge\varphi^i)\phi^i_*\hat{\varepsilon}_i\hat{\mu}_i d\Sigma_{ij} \\
& - \int_\Gamma (n\wedge\phi^1)\varphi^1_*\hat{\varepsilon}_1\hat{\mu}_1 d\Gamma - (\hat{\mu}\phi, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_*)) \\
& + (\hat{\varepsilon}\varphi, \mathrm{Rot}(\mu\phi_*))
\end{aligned}
$$

根据 (4.26), (4.77) 中的体积分对 Φ 关于由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续,故而积分亦如是,从而积分

(4.28)
$$
\left|
\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_{ij}} ((n\wedge\phi^i)\varphi^i_*\hat{\varepsilon}_i\hat{\mu}_i - (n\wedge\phi^j)\varphi^j_*\hat{\varepsilon}_j\hat{\mu}_j) d\Sigma_{ij} \\
& \int_{\Sigma_{ij}} ((n\wedge\varphi^i)\phi^i_*\hat{\varepsilon}_i\hat{\mu}_i - (n\wedge\varphi^j)\phi^j_*\hat{\varepsilon}_j\hat{\mu}_j) d\Sigma_{ij} \\
& \int_\Gamma (n\wedge\phi^1)\varphi^1_*\hat{\varepsilon}_1\hat{\mu}_1 d\Gamma
\end{aligned}
\right.
$$

对由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续.

注意到 (4.25), (4.28) 中的第一个积分等于

$$
-\int_{\Sigma_{ij}} \{\hat{\varepsilon}_i n\wedge\varphi^i_* - \hat{\varepsilon}_j n\wedge\varphi^j_*\}\mu_i\phi^i d\Sigma_{ij}
$$

它对由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续,当且仅当

$$
\text{在 } \Sigma_{ij} \text{ 上 } \hat{\varepsilon}_i n\wedge\varphi^i_* = \hat{\varepsilon}_j n\wedge\varphi^j_*
$$

同理 (4.28) 中的第二个积分导出条件

$$
\text{在 } \Sigma_{ij} \text{ 上 } \hat{\mu}_i n\wedge\phi^i_* = \hat{\mu}_j n\wedge\phi^j_*
$$

第三个积分导出

$$\text{在}\ \Gamma\ \text{上}\quad n\wedge\varphi_*^1=0$$

故 $\Phi_*\in D(\mathscr{A})$ 且 $\mathscr{A}^*\Phi_*=-\mathscr{A}\Phi$. 反之,若 $\Psi\in D(\mathscr{A})$, 则

$$\forall\Phi\in D(\mathscr{A}),\ (\mathscr{A}\Phi,\Psi)_{\mathscr{H}}=-(\Phi,\mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}}$$

故 $\Psi\in D(\mathscr{A}^*)$, 由此得 (4.24). ▯

现在可以提出问题: 令

(4.29) $$\mathscr{M}\Phi=\{\sigma\hat{\varepsilon}\varphi,\ 0\},\ \text{当}\ \Phi=\{\varphi,\ \phi\}\ \text{时}$$

这定义了

(4.30) $$\mathscr{M}\in\mathscr{L}(\mathscr{H};\mathscr{H})$$

要求函数 $U=\{D,\ B\}$,满足

(4.31) $$U\in L^\infty(0,\ T;\ \mathscr{H})$$

(4.32) $$\int_0^T[-(U,\partial\Phi/\partial t)_{\mathscr{H}}-(U,\mathscr{A}\Phi)_{\mathscr{H}}+(\mathscr{M}U,\Phi)_{\mathscr{H}}]dt=\int_0^T(G,\Phi)_{\mathscr{H}}dt+(U_0,\Phi(0))_{\mathscr{H}}$$

(4.33) $$\begin{cases}\forall\Phi,\text{这里}\ \Phi\ \text{满足}\\ \Phi\in L^2(0,\ T;\ D(\mathscr{A}))\\ \partial\Phi/\partial t\in L^2(0,\ T;\ \mathscr{H}),\ \Phi(T)=0\end{cases}$$

在 (4.32) 中 G 和 U_0 给定,分别满足

(4.34) $$G=\{G_1,\ G_2\}\in L^2(0,\ T;\ \mathscr{H})$$

(4.35) $$U_0=\{D_0,\ B_0\}\in\mathscr{H}$$

往证

引理 4.5 问题 (4.31), (4.32) 是对"稳定"介质的 Maxwell 问题的"弱的"提法.

证明. 事实上,设 $U=\{D,\ B\}$ 满足 (3.20)—(3.24), 那么若取满足 (4.33) 的 $\Phi=(\varphi,\ \phi)$, 并分别取 (3.20) 和 (3.21) 与 $\hat{\varepsilon}\varphi$ 和 $\hat{\mu}\phi$ 的内积,则在分部积分后即得 (4.32). ▯

指南. 现在要(在4.3)解问题 (4.31), (4.32). 然后在 5, 6 节研究问题的"强"解的存在性. ▯

4.3 弱解的存在唯一性

定理 4.1 问题 (4.31), (4.32) 有唯一解.

存在性的证明。注意到映射

$$\Phi = \{\varphi, \phi\} \to \Phi, \ \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi), \ \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)$$

使得可把 $D(\mathscr{A})$ 和 $(L^2(\Omega))^{12}$ 的一个闭子空间等同看待，则由此推出 $D(\mathscr{A})$ 可分。设 $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_m, \cdots\}$ 是 $D(\mathscr{A})$ 的（普通意义下）的一个“基”：

$$(4.36)\quad \begin{cases} \forall m, \Phi_1, \cdots, \Phi_m \text{ 线性无关}, \\ \text{线性组合} \sum\limits_{\text{有限项}} \xi_i \Phi_i, \xi_i \in \mathbf{R} \text{ 在 } D(\mathscr{A}) \text{ 中稠密}. \end{cases}$$

我们应用 Galerkin 法．求 (4.32) 的“近似”解如下：

$$(4.37)\quad \begin{cases} U_m(t) \in [\Phi_1, \cdots, \Phi_m] = \text{由 } \Phi_1, \cdots, \Phi_m \text{ 张成的空间}; \\ (U_m'(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{A} U_m(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M} U_m(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} \\ = (G(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases}$$

$$(4.38)\quad U_m(0) = U_{0m}, \ U_{0m} \in [\Phi_1, \cdots, \Phi_m], \ U_{0m} \text{ 在 } \mathscr{H} \text{ 中} \to U_0$$

这就在 $[0, T]$ 中唯一决定了 U_m。若

$$U_m(t) = \sum_{j=1}^{m} k_{jm}(t) \Phi_j$$

则以 $k_{jm}(t)$ 乘 (4.37) 并对 j 求和，注意到（由 (4.24)）

$$(\mathscr{A} U_m(t), U_m(t))_{\mathscr{H}} = 0$$

$$(4.39)\quad (U_m'(t), U_m(t))_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M} U_m(t), U_m(t))_{\mathscr{H}} = (G(t), U_m(t))_{\mathscr{H}}$$

由此，根据 (4.30) 有

$$(4.40)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_m(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant c_1 \|U_m(t)\|_{\mathscr{H}}^2 + \|G(t)\|_{\mathscr{H}} \|U_m(t)\|_{\mathscr{H}}$$

由于 $\|U_{0m}\|_{\mathscr{H}} \leqslant c_2$，因此得

$$\|U_m(t)\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant c_3 + c_4 \int_0^t \|U_m(\sigma)\|_{\mathscr{H}}^2 d\sigma$$

根据 Gronwall 引理，得

$$(4.41)\quad \|U_m(t)\|_{\mathscr{H}} \leqslant \text{不依赖于 } m \text{ 的常数}$$

根据 (4.41)，可以取一子序列 U_μ，

$$(4.42)\quad U_\mu \to U, \text{ 在 } L^\infty(0, T; \mathscr{H}) \text{ 中弱}^*$$

设

(4.43)
$$\begin{cases} \xi_i \in C^1([0, T]), \ \xi_i(T) = 0 \\ \sum_{i=1}^{m_0} \xi_i \Phi_i = \Psi \end{cases}$$

利用 $m = \mu$ 时的 (4.37); 以 ξ_i 乘之, $i \leqslant m_0 \leqslant \mu$; 对 i 求和并分部积分, 考虑到 (4.24), 得

(4.44)
$$\left| \begin{aligned} &\int_0^T [-(U_\mu, \partial\Psi/\partial t)_{\mathscr{H}} - (U_\mu, \mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}} \\ &\quad + (\mathscr{M}U_\mu, \Psi)_{\mathscr{H}}] dt = \int_0^T (G, \Psi)_{\mathscr{H}} dt + (U_{0\mu}, \Psi(0))_{\mathscr{H}} \end{aligned} \right.$$

由于 (4.42) 和 (4.38), 可在 (4.44) 中取极限. 于是有对所有形如 (4.43) 的函数 $\Phi = \Psi$ 满足 (4.31) 和 (4.32) 的 U 的存在性.

而由于 (4.36), 若给定的 Φ 满足 (4.33), 则可找到形如 (4.43) 的函数列 Ψ_k, 使在 $L^2(0, T; D(\mathscr{A}))$ 中 $\Psi_k \to \Phi$, 在 $L^2(0, T; \mathscr{H})$ 中 $\partial\Psi_k/\partial t \to \partial\Phi/\partial t$, 故 (4.32) 对满足 (4.33) 的任意 Φ 成立.

唯一性的证明. 假定对 $G = 0$, $U_0 = 0$, 有 (4.32). 设 $\tilde{U}=$ 在 $t < 0$ 取零值的 U 的延拓; 在 (4.32) 中取

$$\Phi = \xi\Psi$$

$$\xi = \Xi \in \mathscr{D}(]-\infty, T[) \text{ 在 } [0, T] \text{ 的限制}$$

即得在 $\mathscr{D}'(]-\infty, T[)$ 的意义下有

$$d(\tilde{U}, \Psi)_{\mathscr{H}}/dt - (\tilde{U}, \mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M}\tilde{U}, \Psi)_{\mathscr{H}} = 0$$

若 $\tilde{U}$ 表示 $t > T$ 时取 0 的延拓, 则得在 $\mathscr{D}'(\mathrm{R}_t)$ 中

(4.45) $d(\tilde{U}, \Psi)/dt - (\tilde{U}, \mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M}\tilde{U}, \Psi)_{\mathscr{H}} = c\delta(t-T)$

若 $\rho \in \mathscr{D}(\mathrm{R}_t)$, 支集在 $[0, \varepsilon]$ 中, (4.45) 和 ρ 关于 t 作卷积, 即得

(4.46)
$$\left(\frac{d}{dt}(\tilde{U} * \rho), \Psi\right)_{\mathscr{H}} - (\tilde{U} * \rho, \mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}} + ((\mathscr{M}\tilde{U} * \rho), \Psi)_{\mathscr{H}} = c\rho(t-T)$$

由于当 $t \leqslant T$ 时 $\rho(t-T) = 0$, 故由上式得

(4.47) $$\left|\begin{array}{l}\left(\frac{d}{dt}(\tilde{U}*\rho(t)),\Psi\right)_{\mathscr{H}}-(\tilde{U}*\rho(t),\mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}}\\ \quad+(\mathscr{M}(\tilde{U}*\rho(t)),\Psi)_{\mathscr{H}}=0,\ t\leqslant T\end{array}\right.$$

由 (4.47) 可推出，形式

$$\Psi\to(\tilde{U}*\rho(t),\mathscr{A}\Psi)_{\mathscr{H}}$$

在 $D(\mathscr{A})$ 上对由 $\mathscr{H}$ 导出的拓扑连续．故 $\tilde{U}*\rho(t)\in D(\mathscr{A})$，在 (4.47) 中可取 $\Psi=\tilde{U}*\rho(t)$；利用 (4.24) 推出（令 $\tilde{U}*\rho(t)=w(t)$）：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{\mathscr{H}}^2+(\mathscr{M}w(t),w(t))_{\mathscr{H}}=0,\ t\leqslant T$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$w=0$，由此 $w=0$．故当 $t<T$

$$\tilde{U}*\rho=0,\ \forall\rho$$

故 $U=0$．▯

4.4 解对于介电常数和磁导率的连续依赖性

设 $\{\varepsilon^j,\mu^j\}$ 是如下的函数序列

(4.48) $$\left|\begin{array}{l}\hat{\varepsilon}^j=1/\varepsilon^j,\ \hat{\mu}^j=1/\mu^j\in L^\infty(\Omega)\text{ 的一有界集}\\ \hat{\varepsilon}^j\geqslant c_1>0,\hat{\mu}^j\geqslant c_2>0,\text{在 }\Omega\text{ 内p.p.成立}\\ \varepsilon^j,\mu^j\text{ 分块为常数，在 }\Gamma\text{ 的一个邻域上 }\varepsilon^j=\text{常数}\end{array}\right.$$

(4.49) $$\hat{\varepsilon}^j\to\hat{\varepsilon},\ \text{在 }\Omega\text{ 上 p.p.；}\ \hat{\mu}^j\to\hat{\mu},\ \text{在 }\Omega\text{ 上 p.p.}$$

又设 σ^j 满足

(4.50) $$\sigma^j\in L^\infty(\Omega)\text{ 的一有界集，}\sigma^j\to\sigma\text{p.p.}$$

其中 ε, μ, σ 如前几节一样给定．

设 $\mathscr{A}^j$ 和 $\mathscr{M}^j$ 是对应于 ε^j, μ^j, σ^j 的类似于 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{M}$ 的算子．又设 U^j 是类似于 (4.31)，(4.32) 问题的对应解．我们有

定理 4.2 在假设 (4.48)，(4.49)，(4.50) 下，有

(4.51) $$U^j\to U,\ \text{在 }L^\infty(0,T;\mathscr{H})\text{ 中弱}^*$$

证明．设 U_m^j 是原问题的近似解（类似于 (4.37)）

$$\left|\left(\frac{d}{dt}U_m^j(t),\Phi_k\right)_{\mathscr{H}}+(\mathscr{A}^jU_m^j(t),\Phi_k)_{\mathscr{H}}+(\mathscr{M}^jU_m^j(t),\Phi_k)_{\mathscr{H}}\right.$$

(4.52) $\left|\begin{array}{l} = (G(t), \Phi_k)_{\mathscr{H}} \quad 1 \leqslant k \leqslant m \\ U^i_m(0) = U_{0m} \end{array}\right.$

则(因含 $\mathscr{A}^i$ 的项消失，这里仅利用 (4.50)) 有估计

$$\|U^i_m(t)\|_{\mathscr{H}} \leqslant \text{一不依赖于 } m \text{ 和 } i \text{ 的常数。}$$

于是得

(4.53) U^i 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集。

从而可取一个序列，仍记 U^i，使

(4.54) $U^i \to U_*$，在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

我们将有 (4.51)，只要可证明 U_* 是问题 (4.31)，(4.32) 的解，从而 $U_* = U$。引进 Φ^i，它适合

(4.55) $\Phi^i \in L^2(0, T; D(\mathscr{A}^i))$，$(\Phi^i)' \in L^2(0, T; \mathscr{H})$，

$$\Phi^i(T) = 0$$

则有

(4.56) $$\int_0^T \{(-U^i, (\Phi^i)')_{\mathscr{H}} - (U^i, \mathscr{A}^i\Phi^i)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M}^i U^i, \Phi^i)_{\mathscr{H}}\} dt = \int_0^T (G, \Phi^i)_{\mathscr{H}} dt + (U_0, \Phi^i(0))_{\mathscr{H}}$$

暂且承认

引理 4.6 对给定的满足 (4.33) 且

$$\Phi' \in L^2(0, T; D(\mathscr{A}))$$

的 Φ，可找到函数序列 Φ^i，满足 (4.55) 且

(4.57) $\Phi^i \to \Phi$，在 $L^2(0, T; \mathscr{H})$ 中，$(\Phi^i)' \to \Phi'$，

在 $L^2(0, T; \mathscr{H})$ 中

(4.58) $\mathscr{A}^i\Phi^i \to \mathscr{A}\Phi$，在 $L^2(0, T; \mathscr{H})$ 中

由于 (4.54)，(4.57)，(4.58)，可以在 (4.56) 中取极限；这就得到 U_* 满足 (4.32)，因为满足引理 4.6 条件的 Φ 的空间在满足 (4.33) 的 Φ 的空间中稠密，由此得定理；只剩下引理 4.6 的证明。

从证明另一引理开始，它本身也是有趣的

引理 4.7 设 f 在 $\mathscr{H}$ 中给定，对所有 $\lambda > 0$，存在唯一的 $U \in D(\mathscr{A})$ 满足

$$(4.59) \qquad (\mathscr{A} + \lambda)U = f$$

且有

$$(4.60) \qquad \|U\|_{\mathscr{H}} \leqslant \lambda^{-1}\|f\|_{\mathscr{H}}$$

注 4.5 引理 4.7 表示 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的一压缩半群的无穷小生成元[1](又见第 10 节)

引理 4.7 的证明． 用 Galerkin 法．设 $\Phi_1, \cdots, \Phi_m, \cdots$ 是 $D(\mathscr{A})$ 中的一个基，仿定理 4.1 的证明，又设 $U_m \in [\Phi_1, \cdots, \Phi_m]$ 适合

$$(4.61) \qquad ((\mathscr{A} + \lambda)U_m, \Phi_j)_{\mathscr{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathscr{H}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

方程组 (4.61) (是有限维的) 有唯一解；若 $U_m = \xi_j \Phi_j$，则以 ξ_j 乘 (4.6) 并对 j 相加，由于 $(\mathscr{A}U_m, U_m)_{\mathscr{H}} = 0$，即得

$$\lambda\|U_m\|^2_{\mathscr{H}} = (f, U_m)_{\mathscr{H}}$$

由此 $\|U_m\|_{\mathscr{H}} \leqslant \lambda^{-1}\|f\|_{\mathscr{H}}$． 于是可取子序列 U_μ，

$$U_\mu \to U_*, \text{ 在 } \mathscr{H} \text{ 中弱}$$

在 (4.61) 中令 $m = \mu$，固定 $j \leqslant \mu$，则有

$$\lambda(U_\mu, \Phi_j)_{\mathscr{H}} - (U_\mu, \mathscr{A}\Phi_j)_{\mathscr{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathscr{H}}$$

取极限得

$$\lambda(U_*, \Phi_j)_{\mathscr{H}} - (U_*, \mathscr{A}\Phi_j)_{\mathscr{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathscr{H}}$$

此式对 $\forall j$ 成立，故有

$$(4.62) \qquad \lambda(U_*, \Phi)_{\mathscr{H}} - (U_*, \mathscr{A}\Phi)_{\mathscr{H}} = (f, \Phi)_{\mathscr{H}}, \quad \forall \Phi \in D(\mathscr{A})$$

由此推知， 形式 $\Phi \to (U_*, \mathscr{A}\Phi)_{\mathscr{H}}$ 在 $D(\mathscr{A})$ 上对由 $\mathscr{H}$ 诱导的拓扑连续，故 $U_* \in D(\mathscr{A})$，且 (4.62) 为

$$((\mathscr{A} + \lambda)U_*, \Phi)_{\mathscr{H}} = (f, \Phi)_{\mathscr{H}}, \quad \forall \Phi \in D(\mathscr{A})$$

于是 U_* 是 (4.59) 的解，可令 $U = U_*$；由于 $(\mathscr{A}U, U) = 0$，由 (4.59) 推出

$$\lambda\|U\|^2_{\mathscr{H}} = (f, U)_{\mathscr{H}}$$

由此得唯一性和 (4.60)． □

引理 4.6 的证明． 对给定的 $\Phi = \Phi(t)$，定义 $\Phi^j(t)$ (对 t p.p)

---

1) $\mathscr{H}$ 中范数的选取在这里十分重要．

为

(4.63) $(\mathscr{A}^i+\lambda)\Phi^i(t)=(\mathscr{A}+\lambda)\Phi(t)$ ($\lambda>0$ 固定)

的解。根据引理 4.7，$\Phi^i(t)$ 在 $D(\mathscr{A}^i)$ 中存在且唯一。不难验证（由于 $\Phi'\in L^2(0,T;D(\mathscr{A}))$）

(4.64) $(\mathscr{A}^i+\lambda)(\Phi^i(t))'=(\mathscr{A}+\lambda)\Phi'(t)$

全部问题归结为指出

(4.65) $\Phi^i\to\Phi$，在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中弱

事实上，暂且承认 (4.65)，则由 (4.63) 推出

$$\int_0^T((\mathscr{A}^i+\lambda)\Phi^i,\Phi^i)_{\mathscr{H}}dt=\lambda\int_0^T\|\Phi^i\|^2_{\mathscr{H}}dt$$
$$=\int_0^T((\mathscr{A}+\lambda)\Phi,\Phi^i)_{\mathscr{H}}dt\to\int_0^T((\mathscr{A}$$
$$+\lambda)\Phi,\Phi)_{\mathscr{H}}dt=\lambda\int_0^T\|\Phi\|^2_{\mathscr{H}}dt$$

故

$$\int_0^T\|\Phi^i\|^2_{\mathscr{H}}dt\to\int_0^T\|\Phi\|^2_{\mathscr{H}}dt$$

此式结合 (4.65) 证明了在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中的强收敛性。而这时 $\mathscr{A}^i\Phi^i=(\mathscr{A}+\lambda)\Phi-\lambda\Phi^i$ 在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中 $\to\mathscr{A}\Phi$，同样由 (4.64)式得出 $(\Phi^i)'$ 在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中强 $\to\Phi'$。同理还得在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中 $\mathscr{A}^i(\Phi^i)'\to\mathscr{A}\Phi'$。

于是剩下要证明 (4.65)。由 (4.63) 推出

$$\|\Phi^i(t)\|_{\mathscr{H}}\leqslant\lambda^{-1}\|(\mathscr{A}+\lambda)\Phi(t)\|_{\mathscr{H}}$$

故

(4.66) Φ^i 属于 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 的一有界集。

于是可取一序列，仍记为 Φ^i，使

(4.67) $\Phi^i\to\Phi_*$，在 $L^2(0,T;\mathscr{H})$ 中弱

剩下要证明 $\Phi_*=\Phi$。设 $\Theta=\{\theta,\chi\}\in(\mathscr{D}(Q))^6$，这里 $Q=\Omega\times]0,T[$，$\Phi^i=\{\varphi^i,\psi^i\}$，又用 $(,)$ 表示 $(\mathscr{D}'(Q))^6$ 和 $(\mathscr{D}(Q))^6$ 间以及 $(\mathscr{D}'(Q))^3$ 和 $(\mathscr{D}(Q))^3$ 间的内积，我们有

(4.68) $(\mathscr{A}^i\Phi^i,\Theta)=-(\mathrm{Rot}\hat{\mu}^i\psi^i,\theta)+(\mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}^i\varphi^i,\chi)$

$$= -(\tilde{\mu}^j\psi^j, \mathrm{Rot}\theta) + (\tilde{\varepsilon}^j\varphi^j, \mathrm{Rot}\chi)$$

而根据 (4.48), (4.49) 和 Lebesgue 定理,有

$$\tilde{\mu}^j\mathrm{Rot}\theta \to \tilde{\mu}\mathrm{Rot}\theta,\ 在\ (L^2(\Omega))^3\ 中$$

$$\tilde{\varepsilon}^j\mathrm{Rot}\chi \to \tilde{\varepsilon}\mathrm{Rot}\chi,\ 在\ (L^2(\Omega))^3\ 中$$

若 $\Phi_* = \{\varphi_*, \psi_*\}$,则 (4.68) 结合 (4.67) 有

$$(\mathscr{A}^j\Phi^j, \Theta) \to -(\psi_*, \tilde{\mu}\mathrm{Rot}\theta) + (\varphi_*, \tilde{\varepsilon}\mathrm{Rot}\chi) = (\mathscr{A}\Phi_*, \Theta)$$

故

(4.69) $\qquad \mathscr{A}^j\Phi^j \to \mathscr{A}\Phi_*,\ 在\ (\mathscr{D}'(\Omega))^6\ 中$

此外,根据 (4.63) 和 (4.67):

$$\mathscr{A}^j\Phi^j \to (\mathscr{A} + \lambda)\Phi - \lambda\Phi_*,\ 在\ L^2(0, T; \mathscr{H})\ 中弱$$

由此,比较 (4.69) 得

(4.70) $\qquad \mathscr{A}^j\Phi^j \to \mathscr{A}\Phi_*,\ 在\ L^2(0, T; \mathscr{H})\ 中弱$

且

(4.71) $\qquad (\mathscr{A} + \lambda)\Phi_* = (\mathscr{A} + \lambda)\Phi$

若证明了 $\Phi_* \in L^2(0, T; D(\mathscr{A}))$, 则有 $\Phi_* = \Phi$. 而根据 (4.67), (4.70) 和引理 4.2,有

$$n \wedge \Phi^j \to n \wedge \Phi_*,\ 在\ L^2(0, T; (H^{-1/2}(\Gamma))^3)\ 中弱$$

由于 $n \wedge \Phi^j = 0$, 故有 $n \wedge \Phi_* = 0$,由此即得所要结果. □

应用 4.1 我们曾假定在不同介质 Ω_i 内 ε, μ 分块是常数. 事实上,这是一种理想化, ε, μ 在 $\bar{\Omega}$ 本是连续的, 在 Ω_i "内部"是常数, 在交界面邻域内"迅速地"从一个值过渡到另一值. 定理 4.2 指出"理想"问题是"实际"问题的逼近. □

应用 4.2 设

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{q} \Omega_i \bigcup_{i,j} \Sigma_{ij}$$

若其中一区域 Ω_{i_0} 的体积趋于 0 (常数 ε_{i_0}, μ_{i_0} 固定), 则还是根据定理 4.2,对应的解收敛到对应于

$$\Omega = \bigcup_{i \neq i_0} \Omega_i \bigcup_{i \neq i_0} \Sigma_{ij}$$

的问题的解.

5. 稳定介质“强”解的存在性

5.1 $D(\mathscr{A})$ 中的强解

往证

定理 5.1 设给定的 G 和 U_0 满足

(5.1) $$G, \partial G/\partial t \in L^2(0, T; \mathscr{H})$$

(5.2) $$U_0 \in D(\mathscr{A}), (U_0 = \{\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0\})$$

则存在唯一的函数 $U = \{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$，是下列问题的解：

(5.3) $$U \in L^\infty(0, T; D(\mathscr{A}))$$

(5.4) $$\partial U/\partial t \in L^\infty(0, T; \mathscr{H})$$

(5.5) $$\partial \mathbf{D}/\partial t - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}) + \sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D} = \mathbf{G}_1$$

(5.6) $$\partial \mathbf{B}/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2,$$

(5.7) $$\text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上 } n \wedge \mathbf{D} = 0$$

(5.8) $$\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \ \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0.$$

证明

1）仍然采用定理 4.1 证明中用过的 Galerkin 法。由于 $U_0 \in D(\mathscr{A})$，可以选取“基” $\Phi_1, \cdots, \Phi_m, \cdots$ 使

(5.9) $$U_0 \in [\Phi_1]$$

沿用 (4.37)，(4.38)（其中令 $U_{0m} = U_0$，由于 (5.9)，这是合理的）。对 t 求 (4.37) 的导数得出

(5.10) $$(U''_m(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{A}U'_m(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} + (\mu U'_m(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}} = (G'(t), \Phi_j)_{\mathscr{H}}$$

由 (4.37) 推出

$$(U'_m(0), \Phi_j)_{\mathscr{H}} = (G(0) - \mathscr{A}U_0 - \mathscr{M}U_0, \Phi_j)$$

由此得

(5.11) $$\|U'_m(0)\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|G(0) - \mathscr{A}U_0 - \mathscr{M}U_0\|_{\mathscr{H}}$$

以 $k'_{jm}(t)$ 乘 (5.10) 并对 j 求和，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U'_m(t)\|^2_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M}U'_m(t), U'_m(t))_{\mathscr{H}} = (G'(t), U'_m(t))_{\mathscr{H}}$$

结合(5.11),给出

$$(5.12)\qquad \|U'_m(t)\|_{\mathscr{H}} \leqslant \text{一不依赖于 } m \text{ 的常数}$$

由此得到弱问题的解 U(由定理 4.1 给出)满足(5.4)和 $U(0)=U_0$,并有(5.8)。

2) 于是可在(4.32)中对 t 进行分部积分,便得

$$(5.13)\quad \int_0^T [(\partial U/\partial t, \Phi)_{\mathscr{H}} - (U, \mathscr{A}\Phi)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{M}U, \Phi)_{\mathscr{H}}]dt = \int_0^T (G, \Phi)_{\mathscr{H}} dt$$

在(5.13)中取

$$\Phi \in (\mathscr{D}(\Omega \times]0, T[))^6$$

即得(5.5),(5.6)。因此

$$\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B) = \partial D/\partial t + \sigma\hat{\varepsilon}D - G_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = -\partial B/t + G_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

从而为得到(5.3),只需证明(5.7)。

为此,考虑 $\Phi = \{\varphi, \phi\}$,Φ 满足(4.33)并在 $(C^1_K(\bar{\Omega}))^6$ 中取值(见引理 4.1)。又在 $\Gamma \times]0, T[$ 上 $n \wedge \varphi = 0$. 分别取(5.5),(5.6)和 $\hat{\varepsilon}\varphi$, $\hat{\mu}\phi$ 的内积,得

$$(\partial U/\partial t, \Phi)_{\mathscr{H}} + \int_\Gamma \hat{\varepsilon}\hat{\mu}(n \wedge D)\phi d\Gamma - (U, \mathscr{A}\Phi)_{\mathscr{H}} + (\mu U, \Phi)_{\mathscr{H}} = (G, \Phi)_{\mathscr{H}}$$

由此,对 t 积分并与(5.13)比较

$$\int_{\Gamma \times]0,T[} \hat{\varepsilon}\hat{\mu}(n \wedge D)\phi d\Gamma dt = 0$$

由此得(5.7)。 □

5.2 物理问题的解

在物理例子中,函数 G_2 满足(5.1)的补充性质,为明确区分假设的作用,我们要给出两个叙述,从已知函数的性质推出 **B** 的补充性质;我们首先有:

定理 5.2 保留定理 5.1 的假设,还设

(5.14) $\mathrm{Div}G_2 = 0$，在 $\Omega \times]0, T[$ 内

(5.15) $\mathrm{Div}B_0 = 0$。

则

(5.16) $\mathrm{Div}B = 0$，在 $\Omega \times]0, T[$ 内

证明．在广义函数意义下，算子 Div 作用到 (5.6) 两端，我们推出(因为 $\mathrm{Div} \cdot \mathrm{Rot}\varphi = 0$ 且有 (5.14))

(5.17) $$\partial(\mathrm{Div}B)/\partial t = 0$$

由于 (5.15)，由上式即得结果．□

往证若在 $\Gamma \times]0, T[$ 上 $n \cdot G_2 = 0$，且在 Γ 上 $n \cdot B_0 = 0$，则在 $\Gamma \times]0, T[$ 上，$n \cdot B = 0$．但为此需要泛函分析的几个补充结果，下面就给出它们．□

引入空间(和 (4.1) 比较)：

(5.18) $$H(\mathrm{Div}; \Omega) = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^3, \mathrm{Div}v \in L^2(\Omega)\}$$

对于范数

$$(\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\mathrm{Div}v\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

它是 Hilbert 空间．

仿引理 4.1 (见注 4.1)，可以证明

引理 5.1 空间 $(C^K_1(\bar{\Omega}))^3$ 在 $H(\mathrm{Div}; \Omega)$ 中稠密．

往证

引理 5.2 从 $(C^1_K(\bar{\Omega}))^3$ 到 $C^1(\Gamma)$ 的映射

(5.19) $$v \to n \cdot v|_\Gamma = n \cdot v$$

可以由连续性延拓为一个从H $(\mathrm{Div}; \Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 的线性映射，仍记为 $v \to n \cdot v$。

往明．方法同引理 4.2．对于 $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ 定义 $\Phi \in H^1(\Omega)$，满足

(5.20) $$\Phi|_\Gamma = \varphi$$

且

(5.21) 映射 $\varphi \to \Phi$ 是从 $H^{1/2}(\Gamma)$ 到 $H^1(\Omega)$ 是线性连续的。

对 $H(\mathrm{Div}; \Omega)$ 中给定的 u，令

(5.22) $$\pi(\varphi) = (\mathrm{Div}u, \Phi) - (u, \mathrm{Div}\Phi)$$

其中

$$(f, g)=\int_{\Omega} f(x) g(x) d x$$

记号 (5.22) 是合理的，这因为只要 (5.20) 成立，(5.22) 的右端就不依赖于 Φ 的选择。

映射 $\varphi \rightarrow \pi(\varphi)$ 从 $H^{1/2}(\Gamma)$ 到 R 是线性连续的，故

(5.23) $\left\{\begin{array}{l}\pi(\varphi)=(\tau_u, \varphi), \ \tau_u \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ (,) \text{表示 } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ 和 } H^{1/2}(\Gamma) \text{ 间的内积,} \\ \text{映射 } u \rightarrow \tau_u \text{ 从 } H(\mathrm{Div} ; \Omega) \text{ 到 } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ 是线性连续的}\end{array}\right.$

但若 $u \in (C_K^1(\bar{\Omega}))^3$，则

$$\pi(\varphi)=\int_{\Gamma}(n \cdot u) \varphi d \Gamma$$

由此即得引理。 □

注意，若 $G_2 \in L^2(0, T;(L^2(\Omega))^3)$ 且有 (5.14)，则

(5.24) $$G_2 \in L^2(0, T; H(\mathrm{Div} ; \Omega))$$

应用引理 5.2 便得

(5.25) $$n \cdot G_2 \in L^2(0, T ; H^{-1/2}(\Gamma))$$

现可叙述

定理 5.3 保留定理 5.2 的假设，还设

(5.26) $$\text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上 } n \cdot G_2=0$$

且

(5.27) $$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \cdot B_0=0$$

则

(5.28) $$\text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上 } n \cdot B=0$$

证明. 从 (5.6) 推出

(5.29) $$B(t)+\int_0^t \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D)(\sigma) d \sigma=B_0+\int_0^t G_2(\sigma) d \sigma$$

由于 $\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D) \in (L^2(\Omega))^3$ 且 $\operatorname{Div}(\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D))=0$，我们有

$$\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D) \in L^2(0, T ; H(\mathrm{Div} ; \Omega))$$

因此可把算子 $v \rightarrow n \cdot v$ 作用到 (5.29) 两端；再利用 (5.26)，(5.27) 即得

$$n \cdot B(t)+\int_0^t n \cdot \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D)(\sigma) d \sigma=0$$

若验证了

(5.30) $$n \cdot \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D)(\sigma) = 0 \text{（关于 } \sigma.\text{p.p.）}$$

即得(5.28)。而由于在 Γ 上 $\hat{\varepsilon}$ 是常数：

$$n \cdot \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = \hat{\varepsilon}n.\mathrm{Rot}D.$$

又一般地有

(5.31) $n \cdot \mathrm{Rot}\phi$ = 向量 $n \wedge \phi$ 的关于 Γ 上的切向导数算子，

而 $n \wedge D = 0$，故有(5.30)。 ▯

6. 稳定介质。Sobolev 空间中的强解

6.1 嵌入定理

定理 6.1 设 $\mathcal{O}$ 是一带正则边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界开集[1]，引进空间

(6.1) $$X = \{v \mid v \in (L^2(\mathcal{O}))^3,\ \mathrm{Rot}v \in (L^2(\mathcal{O}))^3,\ \mathrm{Div}v \in L^2(\mathcal{O}),\ \text{在 } \partial\mathcal{O} \text{ 上 } n \cdot v = 0\}$$

则 X 对范数

(6.2) $$\|v\|_X = (\|v\|^2_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\mathrm{Rot}v\|^2_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\mathrm{Div}v\|^2_{L^2(\mathcal{O})})^{1/2}$$

是 Hilbert 空间并且有代数和拓扑的等式：

(6.3) $$X = (H^1(\mathcal{O}))^3$$

证明。本节末将证明

引理 6.1 满足在 $\partial\mathcal{O}$ 上 $n \cdot \varphi = 0$ 的向量 $\varphi \in (C^1(\bar{\mathcal{O}}))^3$ 的空间在 X 中稠密。

从下列等式出发，对 $\varphi \in (C^1(\bar{\mathcal{O}}))^3$ 有

(6.4) $$\int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j}\varphi_{i,j}dx = \int_{\mathcal{O}} (|\mathrm{Div}\varphi|^2 + |\mathrm{Rot}\varphi|^2)dx + \int_{\partial\mathcal{O}} (n_j\varphi_i\varphi_{j,i} - n_j\varphi_j\varphi_{i,i})dS$$

其中 dS 是 $\partial\mathcal{O}$ 的面积元。

而若 $n \cdot \varphi = 0$，(6.4) 中的面积分化为

---

1) 不论 $\mathcal{O}$ 有界与否结果皆有效。

(6.5) $$-\int_{\partial\mathcal{O}} n_i\varphi_i\varphi_{i,j}dS = -\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i(n_j\varphi_j)_{,i}dS + \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_j n_{j,i}dS$$

这里把函数 $x \to n(x)$ 延拓成 $\partial\mathcal{O}$ 的一邻域内的 C^1 函数，以使 $n_{j,i}$ 有意义，而由于 $n\cdot\varphi = 0$，算子 $\varphi_i\partial/\partial x_i$ 是沿 $\partial\mathcal{O}$ 的切向微分算子，故在 $\partial\mathcal{O}$ 上 $\varphi_i(n\varphi)_{,i} = 0$。

于是(6.5)证明

(6.6) $$-\int_{\partial\mathcal{O}} n_i\varphi_i\varphi_{i,j}dS = \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_j n_{i,j}dS$$

代到(6.4)中有

(6.7) $$\int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j}\varphi_{i,j}dx = \int_{\mathcal{O}} (|\mathrm{Div}\varphi|^2 + |\mathrm{Rot}\varphi|^2)dx + \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_j n_{i,j}dS$$

而

(6.8) $$\left|\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_j n_{i,j}dS\right| \leqslant c_1 \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_i dS$$

另外，$\forall\varepsilon > 0$，存在 $c(\varepsilon)$ 使对 $\phi \in C^1(\bar{\mathcal{O}})$ 有

(6.9) $$\int_{\partial\mathcal{O}} \phi^2 dS \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \phi_{,i}\phi_{,i}dx + c(\varepsilon)\int_{\mathcal{O}} \phi^2 dx$$

在(6.8)中利用(6.9)，并选择 ε 满足 $c_1\varepsilon = 1/2$：

(6.10) $$\left|\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i\varphi_j n_{i,j}dS\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j}\varphi_{i,j}dx + c_2\int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dx$$

与(6.7)一起，给出

(6.11) $$\int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j}\varphi_{i,j}dx \leqslant 2\int_{\mathcal{O}} [|\mathrm{Div}\varphi|^2 + |\mathrm{Rot}\varphi|^2 + c_2|\varphi|^2]dx$$

由于引理 6.1，由(6.11)即得定理。 □

定理 6.2 保留 4.5 两节的条件。设 Y 是一空间，定义为

(6.12) $$Y = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{Div}v = 0,\ \mathrm{Rot}(\hat{\mu}v) \in (L^2(\Omega))^3,\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ n\cdot v = 0\}$$

则对范数

(6.13) $$\|v\|_Y = (\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\mathrm{Rot}(\hat{\mu}v)\|^2_{(L^2(\Omega))^3})^{1/2}$$

它是 Hilbert 空间，且对 $\forall v \in Y$，有

(6.14) $$v_i \in (H^1(\Omega_i))^3$$

其中 v_i 是 v 在 Ω_i 上的限制，$\mu = 1/\hat{\mu}$ 在 Ω_i 是常数[1]，且

(6.15) $$\|v_i\|_{(H^1(\Omega_i))^3} \leqslant c\|v\|_Y$$

证明

1) 设 Ω_1 是开集，在 Ω_1 上 $\mu = \Gamma$ 上的 μ 值，又 θ 是 $C_K^1(\bar{\Omega}_1)$ 中的一数值函数，在 Γ 的一邻域内 $\theta = 1$，在 $\partial\Omega_1 - \Gamma$ 的一邻域内 $\theta = 0$。对 $v \in Y$ 向量 θv 满足

(6.16) $$\begin{cases} \theta v \in (L^2(\Omega_1))^3 \\ \mathrm{Div}(\theta v) \in L^2(\Omega_1) \\ \mathrm{Rot}(\theta v) \in (L^2(\Omega_1))^3 \\ \text{在 } \partial\Omega_1 \text{ 上 } n \cdot (\theta v) = 0 \end{cases}$$

根据定理 6.1，便得

(6.17) $$\theta v \in (H^1(\Omega_1))^3$$

2) 令 $\hat{\mu} v = u$，我们有

(6.18) $$u \in (L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{Div}(\mu u) = 0,\ \mathrm{Rot}\, u \in (L^2(\Omega))^3,$$
$$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \cdot u = 0,$$

(6.19) $$u \in (H^1(\mathcal{O}_1))^3,\ \mathcal{O}_1 = \Gamma \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 中的一邻域}$$

于是可把 u 延拓为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的一向量函数，使得

(6.20) $$\begin{cases} w \in (H^1(\mathcal{O}_2))^3,\ \mathcal{O}_2 = C(\Omega) \text{ 在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中的一邻域} \\ \text{在 } \Omega \text{ 上 } w = u \end{cases}$$

若令

(6.21) $$f = \mathrm{Rot}\, w$$

并以下列方式由 Fourier 变换[2]定义 $\varPsi = \{\varPsi_1, \varPsi_2, \varPsi_3\}$。

(6.22) $$\hat{\varPsi}_1 = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{|\xi|^2} (\xi_2 \hat{f}_3 - \xi_3 \hat{f}_2)$$

(轮换定义 $\hat{\varPsi}_2, \hat{\varPsi}_3$)，我们有

(6.23) $$\mathrm{Rot}\, \varPsi = f$$

---

1) 记住 μ 在 Γ 的一邻域内是常数。

2) 沿用第一章 4.1 的记号。

且

(6.24) $\partial \Psi/\partial x_i \in (L^2)^3$，这里 $L^2 = L^2(\mathbf{R}^3)$

于是 $\mathrm{Rot}(w - \Psi) = 0$，故

(6.25) $w = \Psi + \mathrm{grad}P$，$\partial P/\partial x_i \in L^2$

若用 ϕ 和 p 分别表示 Ψ 和 P 在 Ω 上的限制，由 (6.25) 推出

(6.26) $u - \phi = \mathrm{grad}p$

由于在 Ω 上 $\mathrm{Div}(\mu u) = 0$，由此得

(6.27) $\mathrm{Div}(\mu\mathrm{grad}p) + \mathrm{Div}(\mu\phi) = 0$

用 $p_i(\phi_i)$ 表示 $p(\phi)$ 在 Ω_i 上的限制，则有

(6.28) 在 Ω_i 内，$\mathrm{Div}(\mu_i\mathrm{grad}p_i) + \mathrm{Div}(\mu_i\phi_i) = 0$

此外，p_i 满足边界和转移条件：由于在 Γ 上 $n \cdot u = 0$，我们有

(6.29) 在 Γ 上 $\partial p/\partial n = -n \cdot \phi$

又由于在 Ω 内 $\mathrm{Div}(\mu u) = 0$，在 Ω_i 和 Ω_j 的公共边界，即交界面 Σ_{ij} 上，我们有

$$\mu_i n \cdot u_i = \mu_j n \cdot u_j$$

由此

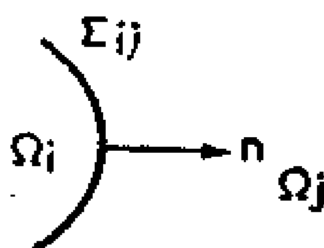


图 26

(6.30) $\mu_i\partial p/\partial n - \mu_j\partial p/\partial n = (\mu_j - \mu_i)n\phi$

而由于根据 (6.24)

(6.31) $n\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$，且 $\in H^{1/2}(\Sigma_{ij})$

从 (6.28)，(6.29)，(6.30) 和转移问题解的正则性推出

(6.32) $\partial^2 p_i/\partial x_j \partial x_k \in L^2(\Omega_i)$，$\forall j, k$

根据 (6.26) 和 $v_i = \mu_i u_i$，由此即得结果．□

引理 6.1 的证明． 问题等价于证明，$(H^2(\mathcal{O}))^3$ 中满足在 $\partial\mathcal{O}$ 上 $n \cdot \varphi = 0$ 的向量 φ 的空间在 X 中稠密．

由于当 $v \in X$ 且 $\phi \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$ 时，有 $v\phi \in X$，所述性质事实上是

局部的，并归结为下述情形，我们考虑一"局部图"(图 27)，即一开集 G 和一从 G 到 Q 的映射 θ，

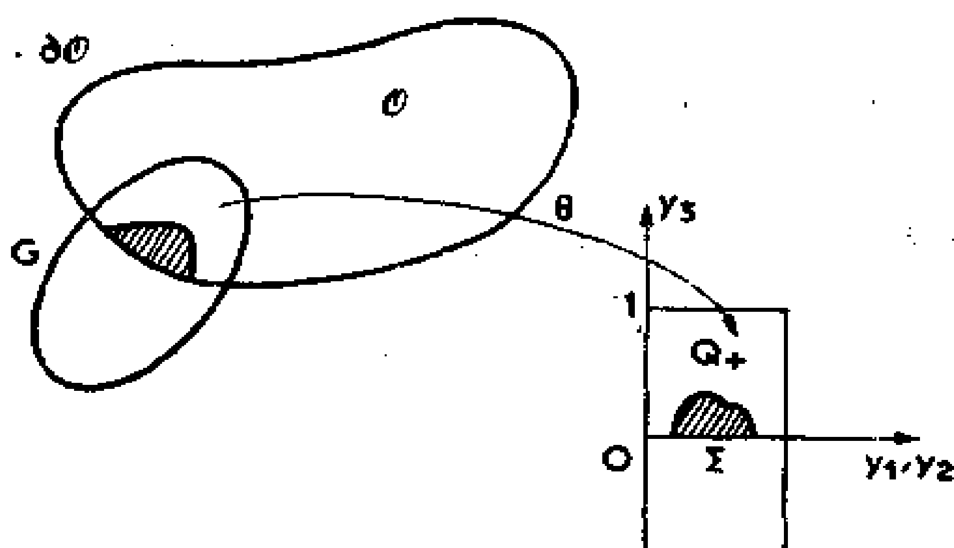


图 27

$$Q = \Sigma \times]-1, 1[$$

$$\Sigma =]0, 1[\times]0, 1[$$

θ 及其逆从 G 到 Q 和从 Q 到 G 一次连续可微，把 $\mathcal{O} \cap G$ 映射到 $Q_+ = \Sigma \times]-1][$，把 $\partial\mathcal{O} \cap G$ 映射到 Σ。

可假定 $\partial\mathcal{O} \cap G$ 的法方向变为 y_3 的方向。设 $P_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 是微分算子 Rot (3 个分量)及 Div 在 θ 下的象；即

(6.33) $$P_i\varphi = p_{ik}^j \partial\varphi_j / \partial x_k$$

且可假定

(6.34) $$p_{33} = 1$$

我们从一个其支集如图 27 所示的(阴影部分) X 的向量函数 v 出发，并考虑它在 θ 下的象 w。那么 $w \in Y$，Y 定义为

$$Y = \{\varphi | \varphi \in (L^2(Q_+))^3, P_i\varphi \in L^2(Q_+), \text{在} \Sigma \text{上} \varphi_3 = 0\}^{1)}$$

(因为 v 由与 $\partial\mathcal{O}$ 相切变为与 Σ 相切)。

另外，w 有如图 27 阴影所示的支集，即在 $y_3 = 1$ 和 $\partial\Sigma \times]0, 1[$ 的一邻域内为零；则说 w 有性质 (S)。

---

1) 对于范数 $(\|\varphi\|^2_{(L^2(Q_+))^3} + \Sigma\|P_i\varphi\|^2_{L^2(Q_+)})^{1/2}$，它是 Hilbert 空间。

于是问题如下：用 $\mathscr{Y}$ 的元素逼近有性质 (S) 的 Y 的元素 w（在 Y 的拓扑意义下），这里

$$\mathscr{Y} = \{\varphi \mid \varphi \in (H^1(Q_+))^3,\ 在\ \Sigma\ 上\ \varphi_3 = 0,\ \varphi\ 有性质\ (S)\}$$

我们利用关于 y_1, y_2 的切向正则化；引入正则化序列 $\rho^m = \rho^m(y_1, y_2)$，即

$$\rho^m(y_1, y_2) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)\ \rho^m \geqslant 0,\ \int \rho^m(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1$$

ρ^m 的支集在 $y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1/m$ 内，作卷积

(6.35) $$\phi^m = w * \rho^m$$

(即 $\phi^m(y) = \int w(y_1 - \lambda_1, y_2 - \lambda_2, y_3)\rho^m(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$)；那么

(6.36) $$\phi_i^m \in L^2(0, 1; H^1(\Sigma))$$

且 ϕ^m 有性质 (S)，在 Σ 上满足 $\phi_3^m = 0$；此外，根据 Friedrichs 引理（见 K. O. Friedrichs[2]）：

$$\phi^m \to w,\ 在\ Y\ 中$$

根据 (6.34) 我们有

(6.37) $$\partial\phi_3^m/\partial y_3 \in L^2(Q_+)$$

结合 (6.36)，这证明了

(6.38) $$\phi_3^m \in H^1(Q_+)$$

固定 m，则问题归结为：设给定 ϕ 满足

(6.39) $$\begin{cases} \phi_i \in L^2(0, T; H^1(\Sigma)),\ i = 1, 2 \\ \phi_3 \in H^1(Q_+),\ 在\ \Sigma\ 上\ \phi_3 = 0 \\ \phi\ 有性质\ (S) \end{cases}$$

必须用 $\mathscr{Y}$ 的元素在 Y 的意义下逼近 ϕ. 可取 $\varphi_3 = \phi_3$.

若令 $\hat{\phi} = \{\phi_1, \phi_2\}$，则有

(6.40) $$P_i\phi = Q_i\hat{\phi} + p_{3k}^i \partial\phi_3/\partial y_k$$

因此，只需用 $\hat{\varphi}$ 在下述意义下逼近 $\hat{\phi}$：

(6.41) $$\begin{cases} Q_i\hat{\varphi} \to Q_i\hat{\phi},\ 在\ (L^2(Q_+))^2\ 中 \\ \hat{\varphi} \to \hat{\phi},\ 在\ (L^2(Q_+))^2\ 中,\ \hat{\varphi} \in (H^1(Q_+))^2 \end{cases}$$

$\hat{\varphi}$ 在 $y_3 = 1$ 和 $\partial\Sigma \times]0, 1[$ 的邻域内为零，无边界条件。而根据引理 4.1 和注记 4.1，这种逼近是可能的。 □

6.2 B 属于一个 Sobolev 空间

定理 6.3 保留定理 5.3 的假设. 设边界 Γ 和各"交界面"Σ_{ij} 两次连续可微,B^i 表示 B 在 Ω_i 的限制. 则

(6.42) $$B^i \in L^\infty(0, T; (H^1(\Omega_i))^3)$$

证明. 根据定理 5.1, 5.2, 5.3, 利用记号 (6.12), 有

(6.43) $$B \in L^\infty(0, T; Y)$$

于是 (6.42) 是定理 6.2 的推论. □

注 6.1 对结果(6.42)能应用 Sobolev 嵌入定理(Sobolev[1]): $H^1(\Omega_i) \subset L^6(\Omega_i)$,得到

(6.44) $$B^i \in L^\infty(0, T; (L^6(\Omega_i))^3)$$

在磁-流体动力学的研究中,这是重要的结果. (Duvaut-Lions [7]). □

6.3 D 属于一个 Sobolev 空间

定理 6.4 保留定理 6.3 的假设. 又设

(6.45) $$\text{在 } \Omega \text{ 内 } \sigma\mathscr{E} = \text{常数(例如}, \sigma = 0)$$

(6.46) $$\text{Div} G_1 = 0$$

(6.47) $$\text{Div} D_0 = 0$$

用 D^i 表示 D 在 Ω_i 上的限制,则有

(6.48) $$D^i \in L^\infty(0, T; (H^1(\Omega_i))^3)$$

证明. 以算子 Div 作用于 (5.5) 两端(由于 (6.45)) 即得

$$\partial(\text{Div} D)/\partial t + \sigma\mathscr{E}\text{Div} D = \text{Div} G_1$$

故有

(6.49) $$\text{Div} D = 0$$

仿 6.1 和 6.2 节就推出 (6.48). 关于所有细节请参考 C. Bardos [1]. □

7. 裂缝天线.非齐次问题[1]

7.1 问题的提出(见 3.4)

问题如下：求向量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$,满足[2]

$$\partial\mathbf{D}/\partial t - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}) + \sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D} = \mathbf{G}_1 \quad (\mathrm{Div}\mathbf{G}_1 = 0) \tag{7.1}$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2 \quad (\mathrm{Div}\mathbf{G}_2 = 0) \tag{7.2}$$

$$\text{在 } \Gamma\times]0,T[\text{ 上 } n\cdot\mathbf{B} = g,\ n\wedge\mathbf{D} = h, \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Div}\mathbf{B} = 0, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0,\ \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0 \quad (\mathrm{Div}\mathbf{B}_0 = 0, \mathrm{Div}\mathbf{D}_0 = 0). \tag{7.5}$$

注 7.1 问题说成是“非齐次的”,是由于边条件 (7.3). ▯

注 7.2 在 3.4 的结构中,我们有

$$g = -n\cdot\mathbf{B}^{(1)},\ h = n\wedge\mathbf{D}^{(1)} \tag{7.6}$$

$$G_1 = 0 \tag{7.7}$$

$$G_2 = 0 \ ▯ \tag{7.8}$$

7.2 结果的陈述

一般设

$$\varphi_\tau = \varphi - n(n\varphi) \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \tag{7.9}$$

则算子 $\varphi \to n\cdot\mathrm{Rot}\varphi|_\Gamma$ 写为

$$\begin{cases} n\cdot\mathrm{Rot}\varphi|_\Gamma = Q\varphi_\tau, \\ Q = \text{沿 } \Gamma \text{ 的一阶切向微分算子.} \end{cases} \tag{7.10}$$

我们要推出,为使 (7.1)—(7.5) 有解,给定函数应满足的必要条件(暂时还只是形式的).

注意可用一(等价)条件

$$\text{在 } \Gamma\times]0,T[\text{ 上 } D_\tau = h^* \tag{7.11}$$

代替条件 $n\wedge D = h$

---

1) 阅读本章时,本节可跳过.

2) 这里把 3.4 的情形稍许推广.

由(7.2)推出，在 Γ 上

$$\partial(nB)/\partial t + n\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = nG_2$$

注意到(7.10)，由此得

$$\partial(nB)/\partial t + \hat{\varepsilon}QD_\tau = nG_2$$

故在 $\Gamma \times]0, T[$ 上

(7.12) $$\partial g/\partial t + \hat{\varepsilon}Qh_* = nG_2$$

由于 $nD_\tau = 0$，由(7.11)推出

(7.13) $$\text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上}, nh_\tau = 0.$$

另外，若 $\mathrm{Div}B = 0$，则 $\int_{\partial\Omega} nBd(\partial\Omega) = 0$，由此

(7.14) $$\int_\Gamma g dS = 0$$

最后 $nB(0) = g(0)$ 给出

(7.15) $$nB_0 = g(0) \ \square$$

现在来验证(仍形式地)，若 $\{D, B\}$ 是(7.1)，(7.2)的解且

(7.16) $$n \wedge D = h \ \text{在}\Gamma \times]0, T[\text{ 上},$$

和(7.5)，又若(7.12)…(7.15)成立，则有(7.3)，(7.4)[1]

事实上，由(7.2)推出

$$\partial(n \cdot B)/\partial t + \hat{\varepsilon}Qh_* = n \cdot G_2$$

根据(7.12)由上即得

$$\partial(n \cdot B)/\partial t = \partial g/\partial t$$

由于(7.15)成立，即得 $n \cdot B = g$，即(7.3)，类似地，有(7.4). $\square$

暂时承认存在向量 P，使

(7.17) $$\begin{cases} P, \partial P/\partial t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3) \\ \mathrm{Div}P = 0 \\ P_\tau = h_\tau, \text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上} \end{cases}$$

若引进

(7.18) $$D^* = D - P$$

---

1) 假定 $\mathrm{Div}G_2 = 0$, $\mathrm{Div}B_0 = 0$.

则

$$
(7.19)\quad
\begin{cases}
\partial D^*/\partial t - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}B) + \sigma\hat{\varepsilon}D^* = G_1 - \partial P/\partial t - \sigma\hat{\varepsilon}P = G_1^* \\
\partial B/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = G_2 - \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}P) = G_2^* \\
n \wedge D^* = 0,\ \text{在}\ \Gamma \times]0, T[\ \text{上} \\
D^*(0) = D_0 - P(0),\ B(0) = B_0
\end{cases}
$$

且问题 (7.1)—(7.5) 等价于 (7.19)，后者是齐次问题。

我们说问题 (7.1)—(7.5) 有一个(唯一)“弱”解， 如果问题 (7.19)(在引理 (4.5) 意义下)有唯一“弱”解。

有了这些准备，下面的 7.3 要证明

定理 7.1 设

$$(7.20)\qquad G_1, G_2 \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$$

$$(7.21)\qquad h_*, \partial h_*/\partial t \in L^2(0, T; (H^{1/2}(\Gamma))^3)$$

$$(7.22)\qquad g \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$$

且条件 (7.12), (7.13), (7.14) 成立，则问题 (7.1)—(7.5) 有唯一“弱”解。

7.3 定理 7.1 的证明

根据 7.2 的讨论，问题归结为证明

引理 7.1 在定理 7.1 的假设下，可求得满足 (7.17) 的 P。

证明。引进空间 Z，定义为

$$(7.23)\qquad Z = \{\varphi \mid \varphi \in (H^1(\Omega))^3,\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上}\ \varphi = 0,\ \mathrm{Div}\varphi = 0\}$$

它在 $(H^1(\Omega))^3$ 中是闭的。φ 在 Γ 上的“迹” $\varphi|_\Gamma$ 满足

$$(7.24)\qquad \varphi|_\Gamma \in \mathscr{X}$$

这里

$$(7.25)\qquad \mathscr{X} = \left\{\phi \mid \phi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3,\ \int_\Gamma n \cdot \varphi d\Gamma = 0\right\}$$

(它是 $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ 的闭子空间)。

根据 Cattabriga [1]，可找到一个映射

$$\phi \to \mathscr{R}\phi$$

它从 $\mathscr{X} \to Z$ 线性连续，且

(7.26)
$$\mathscr{R}\psi|_\Gamma = \psi$$

定义

(7.27)
$$P(t) = \mathscr{R}h_*(t),\quad t \in [0, T]$$

根据(7.13)，h_* 和 $\partial h_*/\partial t$ 是 $L^2(0, T; \mathscr{Y})$ 的元素，又由于 $\mathscr{R} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}; Z)$，故有

$$P,\ \partial P/\partial t \in L^2(0, T; Z)$$

故得出(7.17)的前两个条件.

进而(根据(7.26))有 $P|_\Gamma = h_*$，由此

$$P_\tau = P - n(n\cdot P) = h_* - n(n\cdot h_*) = h_*$$

从而(7.17)的所有条件皆满足. □

注 7.3 必然能得到强解或更一般的解(经由转置)存在的充分必要条件；但对此似乎还没有发表过什么结果.

对于抛物型方程组或某些双曲型方程(或在 Petrowsky 意义下适定的)组的系统研究，但不包括 Maxwell 方程，见 Lions-Magenes [1]. □

8. 可极化介质

8.1 和 Maxwell 算子相关的变分不等方程的存在唯一性结果

沿用第 4 节的记号.

给定 $G = \{G_1, G_2\}$ 和 $U_0 = \{D_0, B_0\}$，(仿定理 5.1)，满足

(8.1)
$$G,\ \partial G/\partial t \in L^2(0, T; \mathscr{H})$$

(8.2)
$$U_0 \in D(\mathscr{A})$$

定义集合

(8.3) $K = \{\varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^3,\ \varepsilon|\varphi(x)| \leqslant \mathscr{D}_0$ 在 Ω 为 p.p. 成立$\}$

其中

(8.4) $\mathscr{D}_0$ 是一个 >0 的函数，分别为常数，确切地说，$\mathscr{D}_0$ 在 ε 和 μ 是常数的区域一常数. □

注 8.1 物理上有兴趣的情形是(见图 28)

$$(8.5)\qquad \mathscr{D}_0 = \begin{cases} \text{常数 } d_0 > 0\text{，在 } \Omega_3, \\ +\infty, \quad \text{在 } \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{cases}$$

K 的定义等价于

$$(8.6)\quad K = \{\varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^3,\ \hat{\varepsilon}_3 |\varphi(x)| \leqslant d_0,\ \text{在 } \Omega_3 \text{ p.p.},\ \varphi \text{ 在 } \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ 任意}\}$$

(这时 $\Omega = \mathbf{R}^3$). □

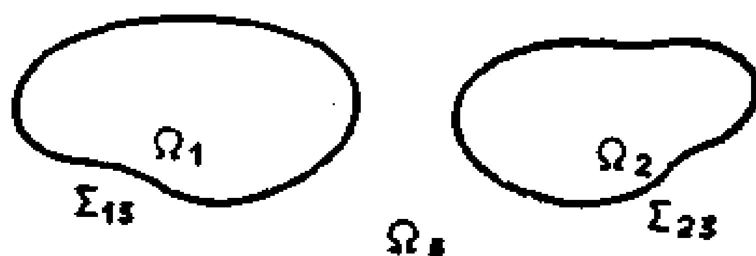


图 28

我们有

$$(8.7)\qquad K \text{ 是 } (L^2(\Omega))^3 \text{ 的一闭凸集.} \quad \square$$

在下面的 8.3 中将证明

定理 8.1 设给定 G 和 U_0 满足 (8.1), (8.2) 且

$$(8.8)\qquad \mathbf{D}_0 \in K$$

和[1]

$$(8.9)\quad \begin{cases} \operatorname{Rot}\ \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}_0) \in (L^2(\Omega))^3,\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \wedge \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}_0) = 0 \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \wedge \mathbf{B}_0 = 0,\ \operatorname{Rot}\operatorname{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}_0) \in (L^2(\Omega))^3 \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \wedge \operatorname{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}_0) = 0 \end{cases}$$

则存在唯一的一对向量 $\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$ 满足

$$(8.10)\qquad \begin{cases} \mathbf{D}, \mathbf{B} \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \\ \partial D/\partial t,\ \partial \mathbf{B}/\partial t \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \end{cases}$$

$$(8.11)\qquad \mathbf{D}(t) \in K,\quad t \in [0, T]$$

$$(8.12)\qquad \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$$

$$(8.13)\qquad \text{在 } \Gamma \times]0, T[\text{ 上 } n \wedge \mathbf{D} = 0$$

$$(\partial \mathbf{D}(t)/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D(t))) + (\sigma\hat{\varepsilon}\mathbf{D}(t), \hat{\varepsilon}(\varphi - \mathbf{D}(t)))$$

(8.14) $$-(\hat{\mu}\mathbf{B}(t), \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - \mathbf{D}(t)))) \geqslant (\mathbf{G}_1(t), \hat{\varepsilon}(\varphi - \mathbf{D}(t)))$$[1]

$\forall\varphi \in K$，$\mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}\varphi \in (L^2(\Omega))^3$，在 Γ 上 $n \wedge \varphi = 0$

(8.15) $$\partial \mathbf{B}/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2,$$

(8.16) $$\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0,\ \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0 \ \square$$

注 8.2 若 $\mathrm{Div}\mathbf{G}_2 = 0$ 且 $n\mathbf{B}_0 = 0$，则从 (8.15) 推出

(8.17) $$\mathrm{Div}\mathbf{B} = 0$$

和

(8.18) $$n \cdot \mathbf{B} = 0,\ 在\ \Gamma\ 上$$

在证明定理 8.1 之前，先来验证这个定理解决了可极化介质的问题。

8.2 变分不等方程的解释．可极化介质问题的求解

我们给出的解释部分地是形式上的。若设 $\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B) \in (L^2(\Omega))^3$，则 (8.14) 写为

(8.19) $$(F(t), \hat{\varepsilon}(\varphi - D(t))) \geqslant 0,\ \forall\varphi \in K$$

其中

(8.20) $$F(t) = \partial D(t)/\partial t + \sigma\hat{\varepsilon}D(t) - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}B(t)) - G_1(t)$$

而 (8.19) 等价于逐点条件

$F(x,t) \cdot \hat{\varepsilon}(\varphi(x) - D(x,t)) \geqslant 0, \forall\varphi \in K$，在 Ω 内 p.p. 成立，或

(8.21) $$\begin{cases} F(x,t) \cdot (k - D(x,t)) \geqslant 0,\ \forall k \in \mathbf{R}^3,\ 满足 \\ 当\ x \in \Omega_i\ 时，|k| \leqslant \mathscr{D}_{0i}\text{[2]}. \end{cases}$$

这里必须区别两种情形：

i) 若 $\hat{\varepsilon}|D(x,t)| < \mathscr{D}_{0i}$，则

$$F(x,t) = 0$$

ii) 若 $\hat{\varepsilon}|D(x,t)| = \mathscr{D}_{0i}$，则存在 $\lambda_i(x,t)$ 使

$$\lambda_i(x,t) \geqslant 0,\ F(x,t) = -\lambda_i(x,t)\hat{\varepsilon}D(x,t)$$

---

1) 在这一表达式中，$(f, g) = \int_\Omega f_i g_i dx$，$i = 1, 2, 3$.

2) 在 Ω_i 内 $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}_{0i}$.

或

$$
(8.22)\quad \begin{cases} \partial D(xt)/\partial t + (\sigma + \lambda_i(x,t))\hat{\varepsilon}D(x,t) - \mathrm{Rot}\hat{\mu}B(x,t) \\ = G_1(x,t) \quad \lambda_i(x,t) \geqslant 0 \end{cases}
$$

这就恰好包含了可极化介质问题.

8.3 定理 8.1 的证明

8.3.1 存在性的证明

行将利用

i) 正则化,为得到"抛物型"算子;

ii) 补偿法,为建立方程.

引进如下定义的空间

$$
(8.23)\quad \begin{cases} \mathscr{V} = \{\Phi | \Phi = \{\varphi, \phi\}, \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \phi \in (L^2(\Omega))^3 \\ \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi) \in (L^2(\Omega))^3, \text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \wedge \varphi = 0\} \end{cases}
$$

对 $\Phi \in \mathscr{V}$, $\Phi_* = \{\varphi_*, \phi_*\} \in \mathscr{V}$, 令

$$
(8.24)\quad ((\Phi, \Phi_*)) = (\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi), \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_*)) + (\mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi), \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi_*))
$$

并注意 $\mathscr{V}$ 对下列范数是 Hilbert 空间

$$
(8.25)\quad \|\Phi\|_{\mathscr{V}} = (\|\varphi\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\phi\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + ((\Phi, \Phi)))^{1/2}
$$

然后引进一个与 K 联系的从 $(L^2(\Omega))^3$ 到 $(L^2(\Omega))^3$ 的补偿算子 β:

$$
(8.26)\quad \begin{cases} \beta \text{ 从 } (L^2(\Omega))^3 \text{ 到 } (L^2(\Omega))^3 \text{ 是单调有界且是 Lipschitz 连续的,} \\ \beta(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \varphi \in K \end{cases}
$$

例如可以令

$$
(8.27)\quad \beta(\varphi)(x) \begin{cases} = \varphi_i(x) - \mathscr{D}_{0i} \dfrac{\varphi_i(x)}{\hat{\varepsilon}_i|\varphi_i(x)|}, \text{当 } x \in \Omega_i, \\ \hat{\varepsilon}_i|\varphi_i(x)| \geqslant \mathscr{D}_{0i} \text{ 时} \\ = 0, \text{ 当 } x \in \Omega_i, \hat{\varepsilon}_i|\varphi_i(x)| \leqslant \mathscr{D}_{0i} \text{ 时} \end{cases} \quad \square
$$

正则和补偿方程. 对 η 和 $\lambda > 0$, 求

$$
(8.29)\quad D = D_{\eta\lambda},\ B = B_{\eta\lambda},\ U = U_{\eta\lambda} = \{D_{\eta\lambda}, B_{\eta\lambda}\}
$$

作为下列问题的解,

(8.30) $(D', \hat{\varepsilon}\varphi)+(B', \hat{\mu}\phi)+((\sigma\hat{\varepsilon}D), \hat{\varepsilon}\varphi)-(\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi))$
$+(\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D), \hat{\mu}\phi)+\eta((U, \Phi))$
$+\lambda^{-1}(\beta(D), \varphi)=(G, \Phi)_{\mathscr{H}}$
$\forall \Phi=\{\varphi, \phi\}\in\mathscr{V}$

(8.31) $$D(0)=D_0, \quad B(0)=B_0$$

在 (8.30) 中令 $G=\{G_1, G_2\}$.

问题 (8.30), (8.31) 有唯一解 (Lions[1] 的第 2 章定理 1.2 的特殊情形)满足

(8.32) $$U\in L^2(0, T; \mathscr{V})\cap L^\infty(0, T; \mathscr{H})$$

若在 (8.30) 中令 $t=0$, 则得(注意到由于 $D_0\in K$, $\beta(D_0)=0$)

$(D'(0), \hat{\varepsilon}\varphi(0))+(B'(0), \hat{\mu}\phi(0))+(\sigma\hat{\varepsilon}D_0, \hat{\varepsilon}\varphi(0))$
$-(\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B_0), \hat{\varepsilon}\varphi(0))+(\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0), \hat{\mu}\phi(0))$
$+\eta(\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0), \mathrm{Rot}(\varepsilon\varphi(0)))+\eta(\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B_0), \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi(0)))$
$=(G(0), \Phi(0))_{\mathscr{H}}$

由于 (8.9), 由上式推出

(8.33) $$\begin{cases} D'(0)=G_1(0)-\sigma\hat{\varepsilon}D_0+\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B_0)-\eta\mathrm{Rot}(\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0)), \\ B'(0)=G_2(0)-\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0)-\eta\mathrm{Rot}(\mathrm{Rot}(\hat{\mu}B_0)) \end{cases}$$

故

(8.34) $\{D'(0), B'(0)\}=\{D'_{\eta\lambda}(0), B'_{\eta\lambda}(0)\}$, 当 λ 和 $\eta\to 0$ 时属于 $\mathscr{H}$ 的一有界集

若对 t 求导 (8.30)[1], 即得

(8.35) $$\begin{cases} (D'', \hat{\varepsilon}\varphi)+(B'', \mu\phi)+(\sigma\hat{\varepsilon}D', \hat{\varepsilon}\varphi)-(\mu B', \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) \\ \quad +(\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D'), \hat{\mu}\phi)+\eta((U', \Phi))+\lambda^{-1}((\beta(D))', \varphi) \\ =(G', \Phi)_{\mathscr{H}} \end{cases}$$

在 (8.35) 中取 $\varphi=D'$, $\phi=B'$; 即得[2]

(8.36) $$(U'', U')_{\mathscr{H}}+(\sigma\hat{\varepsilon}D', \hat{\varepsilon}D')+\eta\|U'\|^2 + \lambda^{-1}((\beta(D))', D')=(G', U')_{\mathscr{H}}$$

---

1) 由差商方法验证.

2) $\|U'\|^2=((U', U'))$.

而（仍用差分方法验证）

$$((\beta(D))', D') = \lim h^{-2}(\beta(D(t+h)) - \beta(D(t)), D(t+h) - D(t)) \geqslant 0$$

（根据 β 的单调性），(8.36) 给出[1]

(8.37) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U'(t)\|^2_{\mathscr{H}} + \eta\|U'(t)\|^2 \leqslant c_1\|U'(t)\|^2_{\mathscr{H}} + c_2\|G'(t)\|^2_{\mathscr{H}}$

用 Gronwall 不等式，由 (8.37) 和 (8.34) 推出

(8.38) $U'_{\eta\lambda}$ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集，

(8.39) $\eta^{1/2}U'_{\eta\lambda}$ 属于 $L^2(0, T; \mathscr{V})$ 的一有界集．

由于 $U_{\eta\lambda}(0) = U_0 = \{D_0, B_0\}$，则从 (8.38) 推出[2]

(8.40) $U_{\eta\lambda}$ 属于 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 的一有界集． □

对 η 和 λ 取极限．

根据 (8.38) 和 (8.40)，可以取一序列，仍记为 $U_{\eta\lambda}$，使当 $\lambda \to 0, \eta \to 0$ 时

(8.41) $U_{\eta\lambda}(U'_{\eta\lambda}) \to U(U')$，在 $L^\infty(0, T; \mathscr{H})$ 中弱*

现在验证，对给定的 $\forall \Phi = \{\varphi, \phi\}$ 且

(8.42) $\Phi \in L^2(0, T; \mathscr{V})$，$\varphi(t) \in K$ p.p.

有

(8.43) $\int_0^T \{(U', \Phi - U)_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}\varphi) + (\hat{\varepsilon}D, \mathrm{Rot}\hat{\mu}\phi) - (G, \Phi - G)\}dt \geqslant 0$

事实上，在 (8.30) 中以 $\Phi - U_{\eta\lambda}$ 代替 $\Phi = \{\varphi, \phi\}$，则有

(8.44) $(U'_{\eta\lambda}, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) - (\hat{\mu}B_{\eta\lambda}, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) + (\mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\mu}(\phi - B_{\eta\lambda})) + \eta((U_{\mathscr{V}}, \Phi)) - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathscr{H}} = \eta\|U_{\eta\lambda}\|^2 - \lambda^{-1}(\beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda})$

而由于 $\varphi = \varphi(t) \in K$，$\beta(\varphi) = 0$，(8.44) 右端等于

---

1) 注意，$|(\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D')| \leqslant c\|U'(t)\|^2_{\mathscr{H}}$.

2) 同样可从 (8.30) 出发直接得到 (8.40)．

$$\eta\|U_{\eta\lambda}\|^2 + \lambda^{-1}(\beta(\varphi) - \beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda}) \geqslant 0$$

注意到显然的等式

$$(\hat{\mu}B_{\eta\lambda}, \ \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}) - (\mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \ \hat{\mu}B_{\eta\lambda}) = 0$$

从 (8.44) 推出

$$(8.45) \quad \int_0^T \{(U'_{\eta\lambda}, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) - (\hat{\mu}D_{\eta\lambda}, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + (\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)) + \eta((U_{\eta\lambda}, \Phi)) - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathscr{H}}\}dt \geqslant 0$$

因此

$$(8.46) \quad \int_0^T \{(U'_{\eta\lambda}, \Phi)_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B_{\eta\lambda}, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + (\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)) + \eta((U_{\eta\lambda}, \Phi)) - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathscr{H}}\}dt \geqslant \frac{1}{2}\|U_{\eta\lambda}(T)\|^2_{\mathscr{H}} - \frac{1}{2}\|U_0\|^2_{\mathscr{H}} + \int_0^T (\sigma\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon} D_{\eta\lambda})dt$$

利用 (8.41) 和 (8.39) 可知，(8.46) 左端收敛到

$$\int_0^T \{(U', \Phi)_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}\varphi) + (\hat{\varepsilon}D, \mathrm{Rot}\hat{\mu}\phi) - (G, \Phi - U)_{\mathscr{H}}\}dt$$

且右端的下极限

$$\geqslant \frac{1}{2}\|U(T)\|^2_{\mathscr{H}} - \frac{1}{2}\|U_0\|^2_{\mathscr{H}} + \int_0^T (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D)dt$$

$$= \int_0^T \{(U', U)_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D)\} dt$$

即得 (8.43). □

现在可利用在 (8.43) 中关于 Φ 的分量 ϕ 没有约束的事实。若以 $k\phi$ 代 ϕ, $k \in \mathbf{R}$, φ 不变，(8.43) 仍成立，令 $k \to \pm\infty$，即得 ϕ 的系数是零，即

$$(8.47) \quad \int_0^T \{(B', \hat{\mu}\phi) + (\hat{\varepsilon}D, \mathrm{Rot}(\hat{\mu}\phi)) - (G_2, \hat{\mu}\phi)\}dt = 0$$

由此推出 (8.15) 成立，故 $\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = G_2 - \partial B/\partial t$ 满足 (8.12)。

再取 (8.15) 和 $\hat{\mu}\phi$ 的内积并积分，比较 (8.47)，即得

$$\int_{\Gamma\times]0,T[} \hat{\varepsilon}\hat{\mu}(n\wedge D)\phi d\Gamma dt = 0$$

由此得 (8.13)。 □

另外，从 (8.15) 推出

$$\int_0^T \{(B', \hat{\mu}(\phi - B)) + (\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D), \hat{\mu}(\phi - B)) - (G_2, \hat{\mu}(\phi - B))\}dt = 0$$

于是 (8.43) 改写为

(8.48) $$\int_0^T \{(D', \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D))\}dt \geqslant 0$$

我们已经看到，由此即可过渡到关于 t 的局部条件，即 (8.14)。 □

对于定理 8.1 中的存在性，只剩下证明 (8.11)。

从 (8.30) 推出(令 $\varphi = D_{\eta\lambda}$, $\phi = B_{\eta\lambda}$)

(8.49) $$\lambda^{-1}\int_0^T (\beta(D_{\eta\lambda}), D_{\eta\lambda})dt \leqslant c$$

此外，根据 (8.40) 和 β 的定义，$\beta(D_{\eta\lambda})$ 属于 $L^\infty(0, T; (L^1(\Omega))^3)$ 的一有界集，于是由取一子序列，可假定

(8.50) $\beta(D_{\eta\lambda}) \to \chi$，在 $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ 中弱*

而从 (8.30) 推出

$$\partial D_{\eta\lambda}/\partial t + \sigma\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda} - \mathrm{Rot}(\hat{\mu}B_{\eta\lambda}) + \eta\mathrm{RotRot}(\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}) + \lambda^{-1}\beta(D_{\eta\lambda}) = G_1$$

由此(结合 (8.38), (8.39), (8.40) 推出

$$\beta(D_{\eta\lambda}) \text{ 在 } (\mathscr{D}'(\Omega\times]0, T[)^3 \text{ 中(譬如说)} \to 0$$

与 (8.50) 比较得

(8.51) $\beta(D_{\eta\lambda}) \to 0$，在 $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ 中弱*

设 φ 是 $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ 的任意函数，我们有

$$\int_0^T (\beta(\varphi) - \beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda})dt \geqslant 0$$

利用 (8.49) 和 (8.51)，推知

$$(8.52)\qquad \int_0^T (\beta(\varphi), \varphi - D)dt \geqslant 0$$

在 (8.52) 中令

$$\varphi = D + s\theta,\ s > 0,\ \theta \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)\ 任意$$

即得

$$s\int_0^T (\beta(D + s\theta), \theta)dt \geqslant 0$$

故

$$\int_0^T (\beta(D + s\theta), \theta)dt \geqslant 0$$

令 $s \to 0$

$$\int_0^T (\beta(D), \theta)dt \geqslant 0,\ \forall\theta$$

故

$$\beta(D) = 0$$

即得 (8.11)。 ▯

8.3.2 唯一性的证明

设 $\{D, B\}$，$\{D_*, B_*\}$ 是问题的两个解。令

$$(8.53)\qquad u = D - D_*,\ v = B - B_*$$

分别在 (8.14) 和在对 D_*，B_* 的类似不等方程中令

$$\varphi = D_*\ 和\ \varphi = D$$

相加得

$$(8.54)\qquad -(u', \hat{\varepsilon}u) - (\sigma\hat{\varepsilon}u, \hat{\varepsilon}u) + (\hat{\mu}v, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}u) \geqslant 0$$

又由 (8.15) 和对 $\{D_*, B_*\}$ 的类似方程推出

$$(8.55)\qquad v' + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}u) = 0$$

故

$$(v', \hat{\mu}v) + (\mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}u), \hat{\mu}v) = 0$$

而 (8.54) 等价于

$$-(u', \hat{\varepsilon}u) - (v', \hat{\mu}v) - (\sigma\hat{\varepsilon}u, \hat{\varepsilon}u) \geqslant 0$$

由此特别地，对 $W = \{u, v\}$ 有

$$-\frac{d}{dt}\|W(t)\|_{\mathscr{W}}^2 \geqslant 0$$

又由于 $W(0)=0$，则有 $W=0$. □

9. 稳定介质作为可极化介质的极限

9.1 结果的陈述

往证当"极化的临界值无限增加时"对应问题的解收敛到通常(对于稳定介质)问题的解，更精确地说有

定理 9.1 假定

(9.1) $$\mathscr{D}_0 \to +\infty$$

(即 $\operatorname{Inf}(\mathscr{D}_0) \to +\infty$). 设 $U^{\mathscr{D}_0}=\{D^{\mathscr{D}_0}, B^{\mathscr{D}_0}\}$ (或 $U=\{D, B\}$) 是极化问题的解(定理 8.1)(或通常问题的解，定理 5.1)，则对

$L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ 中的弱* 拓扑有

(9.2) $$\begin{cases} D^{\mathscr{D}_0} \to D, \ \partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t \to \partial D/\partial t \\ B^{\mathscr{D}_0} \to B, \ \partial B^{\mathscr{D}_0}/\partial t \to \partial B/\partial t \end{cases}$$

(9.3) $$\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D^{\mathscr{D}_0}) \to \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D)$$

9.2 定理 9.1 的证明

定理 8.1 的证明指出

(9.4) $\begin{cases} D^{\mathscr{D}_0}, \partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t, B^{\mathscr{D}_0}, \partial B^{\mathscr{D}_0}/\partial t \text{ 当 } \mathscr{D}_0 \to +\infty \text{ 时属于} \\ L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ 的一有界集.} \end{cases}$

方程 (8.15) 给出

$$\operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon} D^{\mathscr{D}_0}) = G_2 - \partial B^{\mathscr{D}_0}/\partial t$$

属于 $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ 的一有界集.

于是可取一序列，仍记作 $D^{\mathscr{D}_0}$, $B^{\mathscr{D}_0}$，使 (9.2), (9.3) 成立，但还要证明 D, B 是通常问题的解，而为此只要证明

(9.5) $$\partial D/\partial t + \sigma \hat{\varepsilon} D - \operatorname{Rot}(\hat{\mu} B) = G_1$$

设给定 φ 满足

(9.6) $$\varphi \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3,$$
$$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } n \wedge \varphi = 0, \ \varphi \in (L^\infty(\Omega))^3$$

又设

(9.7) $$K^{\mathscr{D}_0} = \text{由 (8.3) 给定的凸集 } K$$

由于 $\varphi \in (L^\infty(\Omega))^3$，对充分大的 $\mathscr{D}_0$ 我们有

(9.8) $$\varphi \in K^{\mathscr{D}_0}$$

故 (8.14) 给出

$$(\partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0})) + (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0}))$$
$$- (\hat{\mu}B^{\mathscr{D}_0}, \mathrm{Rot}\hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0})) \geqslant (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0}))$$

由此，若现在取 $\varphi = \varphi(t)$ 满足

(9.9) $$\|\varphi(t)\|_{(L^\infty(\Omega))^3} \leqslant \text{常数} \quad t \in [0, T]$$

则有

(9.10) $$\int_0^T \{(\partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B^{\mathscr{D}_0}, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi))$$
$$+ (\hat{\mu}B^{\mathscr{D}_0}, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0})) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0}))\}dt$$
$$\geqslant \int_0^T [(\partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t, \hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}) + (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0})]dt$$

而根据 (8.15)

(9.11) $$\partial B^{\mathscr{D}_0}/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}) = G_2$$

于是 (9.10) 还可写成

(9.12) $$\int_0^T \{(\partial D^{\mathscr{D}_0}/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B^{\mathscr{D}_0}, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi))$$
$$+ (\hat{\mu}B^{\mathscr{D}_0}, G_2) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathscr{D}_0}))\}dt$$
$$\geqslant \int_0^T \{(\partial U^{\mathscr{D}_0}/\partial t, U^{\mathscr{D}_0})_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0})\}dt$$
$$= \frac{1}{2}\|U^{\mathscr{D}_0}(T)\|^2_{\mathscr{H}} - \frac{1}{2}\|U_0\|^2_{\mathscr{H}} + \int_0^T (\sigma\hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0}, \hat{\varepsilon}D^{\mathscr{D}_0})\, dt$$

在 (9.12) 左端和右端可分别取极限和下极限，而得

(9.13) $$\int_0^T \{(\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma\hat{\varepsilon}, D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi))$$
$$+ (\hat{\mu}B, G_2) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D))\}dt$$
$$\geqslant \int_0^T (\partial U/\partial t, U)_{\mathscr{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D)\}dt$$

另外 (9.11) 的极限形式给出

(9.14) $$\partial B/\partial t + \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = G_2$$

在 (9.13) 中注意到 (9.14)，我们有

$$(9.15)\quad \int_0^T \{(\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - D))) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D))\}dt \geqslant 0$$

由此即可过渡到逐点条件，即对任意满足 (9.6) 的 φ 有

$$(9.16)\quad (\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - D))) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) \geqslant 0,$$

对 t p.p.

但仿第 6 节可验证，满足(9.6)的 φ 的空间在满足如下条件的函数 φ 的空间中稠密

$$(9.17)\quad \varphi \in (L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3,\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } n\wedge\varphi = 0$$

故 (9.16) 对任意满足 (9.17) 的 φ 成立。于是可在 (9.16) 中以 $D\pm\varphi$ 代 φ，由此对任意满足 (9.17) 的 φ 有

$$(\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \mathrm{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) - (G_1, \hat{\varepsilon}\varphi) = 0$$

即得结果。□

10. 各 种 补 充

注 10.1 引理 4.7 结合 Hille-Yosida 定理 (见 Hille-Phillips [1]，Yosida [1]) 可证明

定理 10.1 算子 $-\mathscr{A}$ 是从 $t\geqslant 0$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{H})$ 的一连续半群 $t\to G(t)$ 的无穷小生成元.

换句话说，若 U_0 在 $\mathscr{H}(D(\mathscr{A}))$ 中给定，存在唯一的函数 $t\to U(t)$，作为下列问题的解

$$(10.1)\quad \partial U/\partial t + \mathscr{A}U = 0$$

$$(10.2)\quad U(0) = U_0$$

使从 $t\geqslant 0$ 到 $\mathscr{H}$ 的 $t\to U(t)$ 连续的(或一次连续可微的) (10.1) 的弱(或强)解由下式给定

$$(10.3)\quad U(t) = G(t)U_0$$

若 $U_0\in D(\mathscr{A})$，则 $\forall t\geqslant 0$，$U(t)\in D(\mathscr{A})$

此外——$\mathscr{H}$ 中范数的选取在这里显示其重要性——$G(t)$ 是一压缩算子，即

(10.4) $$\|G(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{H})} \leqslant 1, \quad t \geqslant 0 \; \square$$

11. 评 述

本章中我们研究了两类介质："稳定的"和"可电离的"，它们分别以 Ohm 定律 (2.27) 和定律 (2.28) 表明其特征. 在实际中，介于二者之间的定律常呈下列形式，

$$J = \Phi(E)$$

当 Φ 是极大单调图形的多值映射时，这里的结果应能推广到这种情形. 但是关于这类现象的物理测量似乎要牵涉到延迟现象，正如注 2.5 中所指出的；这时 Φ 不再是单调的. 从数学观点看，相应的问题还未曾研究过. 但 Φ 是 Lipschitz 连续函数的情形是能解决的.

在本章叙述的理论中，我们未考虑光速（相对 L/T，L 是一参照长度）是很大的这一事实. 这意味着，当激励本身是正弦形式时，经过短暂的时间就能获得稳定的周期现象. 这一情形的数学验证导出下列问题：

仍取 3.1 的例子，令

$$G_1(x,t) = Y(t)G_1(x)e^{i\omega t}$$
$$G_2(x,t) = Y(t)G_2(x)e^{i\omega t}$$

这里当 $t<0$ 时 $Y(t)$ 等于零，当 $t>0$ 时 $Y(t)$ 等于 $+1$，$i=\sqrt{-1}$，ω 是一正常数，$G_1(x)$ 和 $G_2(x)$ 是只依赖于 x 的给定的函数.

可以证明，对充分大的 t 解 (B,D) 有近似表达式

$$B(x,t) = B^*(x)e^{i\omega t}, \quad D(x,t) = D^*(x)e^{i\omega t}$$

从 3.2 的情形出发，可提出同样的问题，这里 g 有形式

$$g(x,t) = g^*(x)e^{i\omega t}$$

从 3.3 出发亦然，这里

$$B^{(1)}.n = Y(t)b^*(x)e^{i\omega t}$$

$$D^{(1)}.n = Y(t)d^*(x)e^{i\omega t} \ \square$$

第6节的嵌入定理综合了 C. Goulaouic 和 B. Hanouzet [1]，J.Gobert [3] 和 G. Schmidt [1] 的结果。

参考文献

B. D. ANNIN

[1] Existence and uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross section. *P.V. of Appl. Math. Mech.*, 29 (1965), 1038-1047.

M. ARTOLA

[1] Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à de problèmes de retard. *Annales E.N.S.*, 2 (1969), 137-253.

C. BAIOCCHI

[1] A paraître.

MM. BALABAN, A. E. GREEN, P. M. NAGHDI

[1] Acceleration waves in elastic-plastic materials. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 8 (1970), pp. 315-335.

C. BARDOS

[1] A paraître.

D. BEGIS

[1] Thèse 3e cycle, Paris (1972).

R. BELLMAN et K. COOKE

[1] *Differentiel-Difference Equations*. Acad. Press, New York (1963).

R. BERKER

[1] Mouvement d'un fluide visqueux incompressible. *Handbuch der Physik*, Vol. VIII, 2 (1963).

A. BEURLING et J. DENY

[1] Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire. *Acta Math.*, 99 (1958), 203-224.

E. B. BIHOVSKI

[1] Solution des problèmes mixtes pour les équations de Maxwell dans le cas de frontières supraconductrices (en russe). *Vestnik Leningrad Univ.*, 13 (1957), 50-65.

E. B. BIHOVSKI et N. V. SMIRNOV

[1] Sur les décompositions orthogonales des espaces de fonctions vecteurs... *Troudi Mat. Inst. Steklov*, LIX (1960), 5-33.

M. BIROLI

[1] Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche. *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa* (à paraître).

N. BOURBAKI

[1] *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 3 et 4. Hermann. Paris (1955).

J. F. BOURGAT

[1] Thèse 3e cycle, Paris (1971).

H. BRÉZIS

[1] Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Annales Inst. Fourier*, 18 (1968), 115-175.

[2] Inéquations variationnelles. *J. de Math. Pures et Appliquées* (1971).

[3] Résultats non publiés.

H. Brézis et J. L. Lions
[1] Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 264 (1967), 928-931.

H. Brézis et M. Sibony
[1] *Archive for Rat. Mech and Analysis* (1971).

H. Brézis et G. Stampacchia
[1] Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bull. Soc. Math. France*, 96 (1968), 153-180.

F. Browder
[1] Non linear elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 862-674.

G. Bruhat
[1] *Electricité*. Masson.

L. Brun
[1] Méthodes énergétiques dans les systèmes évolutifs linéaires. I. Séparation des énergies. II. Théorèmes d'Unicité. *J. Mécanique*, 8 (1969), 125-166 et 167-192.

H. D. Bui et K. Dangvan
[1] Sur le problème aux limites en vitesse des contraintes du solide élasto-plastique. *Int. J. Solid Structures*, Vol. 6 (1970), 183-193.

H. Cabannes
[1] *Magnétodynamique des fluides*. « Les cours de Sorbonne » C.D.U. Paris (1969).

P. Casal
[1] Capillarité interne en mécanique des milieux continus. *C. R. Acad. Sci.*, tome 256, 29 avril 1963.

L. Cattabriga
[1] Su un problema al conterno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Padova*, 31 (1961), 1-33.

J. Céa et R. Glowinski
[1] A paraitre.

J. Céa, R. Glowinski et J. Nédélec
[1] A paraître.

B. D. Coleman et W. Noll
[1] Material symmetry and thermodynamic inequalities in Finite Elastic Deformations. *Archive for Rat. Mech. Analysis*, Vol. 15, nº 2 (1964), pp. 87-111.

V. Comincioli
[1] Un risultato relativo a disequazioni variazionali d'evoluzione per operatori del primo ordine in t con termini di ritardo. *Annali Mat. Pura ed Applicata* (à paraître).
[2] Disequaziono variazionali d'evoluzione per operatori del 2º ordine in t con termini di ritardo. *Boll. U.M.I.* (à paraitre).
[3] Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université de Pavie (1971).

Cooke : Cf. Bellman et Cooke.

B. Courjaret
[1] A paraître.

N. Coutris
[1] Flexion élastoplastique d'une plaque. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 270 (1970), pp. 1377-1380.

T. G. Cowling

[1] *Magneto hydrodynamics.* Interscience. Tracts nº 4 (1957).

N. Critescu

[1] *Dynamic plasticity.* North Holland Publ. Company, Amsterdam (1967).

C. M. Dafermos

[1] An abstract Volterra equation with applications to linear-visco-elasticity. A paraître dans *J. of Diff. Eq.*

[2] On the existence and the Asymptotic Stability of solutions of the Equations of linear Thermoelasticity. *Archive for Rat. Mech. Analysis,* 29 (1968), 241-271.

Dangvan : Cf. Bui et Dangvan.

W. A. Day

[1] Time reversal and the Symmetry of the Relaxation function of a linear Viscoelastic Material. *Archive Rat. Mech. Analysis.,* 40 (3) (1971), 155-159.

Deny : Cf. Beurling et Deny.

Dinca

[1] Sur la monotonie d'après Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de plasticité. *C. R. Acad. Sci.,* tome 269 (1969), pp. 535-538.

J. N. Distefano

[1] On a class of Volterra integral equations ... Univ. of Southern Calif., 243, janvier 1968.

N. Dunford et J. T. S. Schwartz

[1] *Linear operators.* Part I, Interscience Pub. (1958).

G. Duvaut

[1] Application du principe de l'indifférence matérielle à un milieu élastique matériellement polarisé. *C. R. Acad. Sci. Paris,* tome 258 (1964), 3631-3634.

[2] Lois de comportement pour un milieu isotrope matériellement polarisé de degré deux. *C. R. Acad. Sci. Paris,* tome 261 (1965), 3178-3179.

[3] Problème de Signorini en viscoélasticité linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris,* tome 268 (1969), pp. 1044-1046.

[4] Le problème de Signorini en viscoélasticité linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, tome* 268 (1969), pp. 1044-1046.

[5] Problèmes unilatéraux en mécanique des milieux continus. *Congrès International des mathématiciens,* Nice (1970).

G. Duvaut, J. L. Lions

[1] Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas stationnaire. *C. R. Acad. Sc. Paris,* tome 269 (1969), 510-513.

[2] Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas d'évolution. *C. R. Acad. Sc. Paris,* tome 269 (1969), 570-572.

[3] Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermo-élasticité. *C. R. Acad. Sc. Paris,* tome 269 (1969), 1198-1201.

[4] Ecoulement d'un fluide rigide viscoplastique incompressible. *C. R. Acad. Sc. Paris,* tome 270 (1970), 58-61.

[5] Sur les équations de Maxwell des milieux polarisables et sur la magnéto-dynamique des fluides de Bingham. *C. R. Acad. Sc. Paris,* tome 270 (1970), 1600-1603.

[6] Elasticité avec frottement. *J. de Mécanique* (1971).

[7] Inéquations en thermo-élasticité et magnéto-hydrodynamique. *Archive Rat. Mech. Anal.* (1972).

[8] Transfert thermique dans les fluides de Bingham. (à paraître).

A. C. ERINGEN et SUHUBI

[1] Non linear theory of micro-elastic solids. *Internat. J. Engng Sci.*, 2, 4 (1964), pp. 389-404.

G. FICHERA

[1] Problemi elastostatici con vincoli unilaterali il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Mem. Accad. Naz. Lincei*, 8 (7) (1964), 91-140.

R. FINN

[1] On the exterior stationary problem for the Navier Stokes equations and Associated perturbation problems. *Erchive Rat. Mech. Anal.*, 19 (1965), 363-406.

W. FLUGGE

[1] *Viscoelasticity*. Blaisdell publishing Company (1967).

C. FOIAS et G. PRODI

[1] Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier Stokes en dimension 2. *Rend. Sem. Mat. Padova*, XXXIX (1967), 1-34.

[2] A paraître.

M. FORTIN

[1] Résolution numérique d'écoulements newtoniens et non newtoniens. Thèse, Paris (1962).

M. FREMOND

[1] Solide posé sur un sol élastique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 271 (1970), 508-510.

[2] Thèse, Paris (1971).

A. G. FREDRICKSON

[1] *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1964).

A. M. FREUDENTHAL et H. GEIRINGER

[1] The mathematical theories of the inelastic Continuum. *Handbuch der Physik Encyclopedia of Physics*, Vol. VII, Elasticity and Plasticity. Springer Verlag (1958).

K. O. FRIEDRICHS

[1] Differential forms on Riemannian manifolds. *Comm. Pure Applied Math*, 8 (1955), 551-590.

[2] Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Applied Math.*, 7 (1954), 345-392.

A. FUSCIARDI, U. MOSCO, F. SCARPINI et A. SCHIAFFINO

[1] *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1972).

GEIRINGER : Cf. Freudenthal et Geiringer.

P. GERMAIN

[1] *Mécanique des milieux continus*. Masson (1962).

[2] *Cours de Mécanique des solides* (1964-1965). Faculté des Sciences de Paris.

[3] Théorie des ondes de chocs en dynamique des gaz et en magnétodynamique des fluides. Cours à la Faculté des Sciences de Paris. Département de Mécanique (1962-1963).

R. GLOWINSKI, J. L. LIONS et R. TREMOLIÈRES

[1] *Approximation numérique des solutions des inéquations en Mécanique et en Physique*. Paris, Dunod (en préparation). Cf. Céa-Glowinski, Céa-Glowinski-Nédélec.

J. GOBERT

[1] Une inéquation fondamentale de la théorie de l'élasticité. *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, n°s 3 et 4 (1962).

[2] Opérateurs matriciels de dérivation elliptiques et problèmes aux limites. *Mémoires de la Soc. Royale des Sciences de Liège* (1961) (6), 7-143.

[3] Sur une inégalité de coercivité. *J. of Math. Analysis and Applications*, 35 (1971).

C. Goulaouic, B. Hanouzet
[1] Un résultat de régularité pour les solutions d'un système d'équations différentielles (à paraître).

M. Goursat
[1] Thèse 3e cycle, Paris (1971).

A. E. Green
[1] On Reissner theory of bending of elastic plates. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 7 (1949).

A. E. Green et R. S. Rivlin
[1] Multipolar continuum mechanics : functional theory I. *Proceedings of the Royal Society*, A, Vol. 284 (1965).

A. E. Green et W. Zerna
[1] *Theoretical elasticity*, Oxford Clarendon Press (1968).

A. E. Green : Cf. Balaban, Green, Naghdi.

A. Haar et Th. Von Karman
[1] Zur theorie der Spannungs zustände in plastischen und sandartigen Medien. Nachr. der Wiss. zu Goettingen, math. Phys. Klasse (1909), 204-218.

A. Halanay
[1] *Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags*. Acad. Press New-York (1966).

Hanouzet : Cf. Goulaouic et Hanouzet.

Y. Haugazeau
[1] Thèse, Paris (1968).

R. Hayart
[1] Extension des formules de Murnaghan relatives au solide en phase d'élasticité finie, au cas de couples superficiels. *C. R. Acad. Sci.*, tome 258, 3 février 1964.

H. Hencky
[1] Zeitschrift für angewande Mathematik und Physik, *4*, 323 (1924).
[2] Uber die berucksichtung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ing. Archiv.*, XVI Band, (1947).

C. T. Herakovich et P. G. Hodge
[1] Elastic-plastic torsion of hollow bars by quadratic programming. *Int. J. Mech. Sciences*. Pergamon Press (1969), 11, 53-63.

R. Hill
[1] *Mathematical theory of plasticity*. University Press (Oxford) (1950).
[2] *Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics*, *1*, 18 (1948).
[3] *Journal of applied mechanics*, *17*, 64 (1950).
[4] Philosophical Magazine, *42*, 868 (1951).

E. Hille et R. S. Phillips
[1] *Functional Analysis and Semi Groups*. *Amer. Math. Soc. Coll. Pub.*, XXXI (1957).

P. G. Hodge
[1] Elastic-plastic torsion as a problem in non linear programming. *Int. J. Solids Structures* (1967), 3, 989-999. Cf. Herakovich et Hodge, Prager et Hodge.

L. Hormander
[1] Definitions of maximal differential operators. *Arkiv for Mat.*, 46 (1958), 501-504.

A. Houpeurt
[1] *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. I.F.P. (Technip), Paris (1957).

F. John

[1] Plane strain problem for a perfectly elastic material of harmonic type. *Com. on pure and applied math.* Vol. XIII (1960), pp. 239-296.

[2] Plane elastic waves of finite amplitude in Hadamard material of Harmonic materials. *Com. on pure and applied math..* Vol. XIX (1966), pp. 309-341.

Karman : Cf. Haar et Karman.

W. T. Koiter

[1] General theorems for elastic plastic solids. *Progress in solid mechanics.* Vol., pp. 165-221. North Holland, P.C. (1960).

M. A. Krasnoel'skii

[1] *Topological methods in the theory of Non linear Integral Equations.* Pergamon Press (1964) (Traduction de l'édition russe de 1956).

O. A. Ladyzenskaya

[1] *La théorie mathématique des fluides visqueux incompressibles.* Moscou (1961). Trad. anglaise, Gordon-Breach, New York (1963).

O. A. Ladyzenskaya et V. A. Solonnikov

[1] Résolution de certains problèmes non stationnaires de la magnéto-hydrodynamique des fluides visqueux incompressibles (en russe). *Troudi Mat. Inst. Steklov*, LIX (1960), 115-173.

H. Lanchon

[1] Solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de Section quelconque. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 269 (1969), pp. 791-794.

[2] *Sur la solution* du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 271 (1970), pp. 1137-1140.

[3] Problème d'élastoplasticité statique pour un matériau régi par la loi de Hencky. *C. R. Acad. Sci.*, tome 271 (1970), pp. 888-891.

[4] Thèse, Paris (à paraître).

H. Lanchon, G. Duvaut

[1] Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section quelconque. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 264 (1967), pp. 520-523.

L. Landau et E. Lifchitz

[1] *Théorie de l'élasticité*, tome VII. Editions MIR, Moscou (1967).

[2] *Course of theoretical Physics. Fluid Mechanics.* Pergamon Press (1959).

P. Léonard

[1] Problèmes aux limites pour les opérateurs matriciels de dérivation hyperboliques des premier et second ordres. XI (1965), 7-128.

J. Leray

[1] Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique. *J. Math. Pures et Appl.*, XII (1933), 1-82.

[2] Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures et Appl.*, XIII (1934), 331-418.

[3] Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta. Math.*, 63 (1934), 193-248.

M. Lévy

[1] Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites élastiques. *Comptes rendus de l'Acad. des Sci.*, *70* (1870), 1323-1325.

[2] Mémoire sur les équations des corps solides ductiles au-delà de la limite élastique. *Journal des mathématiques pures et appliquées*, *16* (1871), 369-372.

LIFCHITZ : Cf. Landau et Lifchitz.

F. H. LIN

[1] *Theory of inelastic structures*, John Wiley and Sons édit. (1968).

J. L. LIONS

[1] *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars (1969).

[2] *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Gauthier-Villars (1968).

[3] Les problèmes aux limites en théorie des distributions. *Acta Mathematica*, 94 (1955), 13-153.

[4] Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du deuxième ordre. Sem. J. Leray, Collège de France, 1965-66, II, 17-33.

[5] Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. *Symp. Non Linear Func. Analysis*, avril 1971 ; et *C. R. Acad. Sci. Paris* (1971).

[6] Cours Faculté des Sciences de Paris (1971).

[7] Inéquations variationnelles d'évolution. Congrès International des Mathématiciens. Nice (1970).

J. L. LIONS et E. MAGENES

[1] *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, Vol. 1 et 2 (1968) ; Vol. 3 (1970).

J. L. LIONS et J. PEETRE

[1] Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. Hautes Etudes, 19, Paris (1964), 5-68.

J. L. LIONS et G. PRODI

[1] Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier Stokes en dimension 2. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1959), 248.

J. L. LIONS, G. STAMPACCHIA

[1] Variational inequalities. *Comm. Pure Applied Math.*, XX (1967), 493-519.

J. L. LIONS et W. STRAUSS

[1] Some non linear evolution equations. *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 43-96.

J. L. LIONS : Cf. Brézis, Duvaut, Glowinski.

A. E. H. LOVE

[1] *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover (1944).

E. MAGENES et G. STAMPACCHIA

[1] I problema al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Serie III, Vol. XII, fasc. III (1958), pp. 247-358.

E. MAGENES : Cf. Lions et Magenes.

G. MANDEL

[1] *Cours de mécanique des milieux continus*, tome 1, *Mécanique des fluides*, tome 2, *Mécanique des Solides*. Gauthier-Villars (1966).

[2] Séminaire de plasticité Publ. Sci. Tech. Ministère de l'air. *N.T.* 116 (1962).

MAROCCO

[1] Thèse 3e cycle, Paris (1970).

R. D. MINDLIN et H. F. TIERSTEN

[1] Effects of couple-Stress in linear elasticity. *Arch. f. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 11, nº 5, décembre 1962, pp. 415-448.

G. Minty
[1] Monotone (non linear) operators in Hilbert Spare. *Duke Math. J.*, 29 (1962), 341-346.
M. Mooney
[1] *J. of Appl. Physics*, 11 (1940), 528.
J. J. Moreau
[1] Fonctionnelles convexes. Collège de France (1966-1967).
[2] La notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *C. R. de l'Acad. des Sci. Paris*, Séance du 16-12-68, tome 257, pp. 954-957.
[3] Sur la naissance de la cavitation dans une conduite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 259 (1964), 3948-3951.
Mosco : Cf. Fusciardi.
P. P. Mosolov et V. P. Miasnikov
[1] Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous plastic medium. *PMM*, 29 (1965), 468-492.
C. Muller
[1] *Foundations of the Mathematical theory of Electromagnetic Waves.* Springer, tome 155. Grundlehren der Math. Wiss. (1969).
Muskat
[1] *The flow of homogenous fluid flow through porous media.* MacGraw-Hill (1937).
[2] *Multiphase flow through porous media.* MacGraw-Hill.
Naghdi : Cf. Balaban, Green, Naghdi.
B. Nayroles
[1] Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites. *Journal de mécanique*, Vol. IX, n° 3 (1970), pp. 491-506.
[2] Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides. *Journal de mécanique* (à paraître).
J. Necas
[1] *Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques.* Acad. Tchécoslovaque des Sciences, Prague (1967).
J. C. Nédélec
[1] Sur des inéquations variationnelles (à paraître).
L. Nirenberg
[1] Communication personnelle, avril 1971.
J. C. Nitsche
[1] Variational problems with inequalities as boundary conditions or How to fashion a Cheap hat for Giacometti's Brother. *Arch. f. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 35, n° 2 (1969), pp. 83-113.
W. Noll et C. Truesdell
[1] The non linear field theory of mechanics. *Handbuch der Physik*, Vol. III,3. Springer Verlag (1965). Cf. Coleman et Noll.
W. Panofsky, M. Phillips
[1] *Classical electricity and magnetism.* Addison-Wesley publishing Company (1962).
J. Peetre
[1] Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev. *Ann. Inst. Fourier*, 16 (1966), 279-317. Cf. Lions et Peetre.

M. PHILLIPS : Cf. Panofsky et Phillips.

M. PIAU

[1] Conduction de la chaleur et propagation des ondes dans les milieux élasto-plastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 271 (1970), 1133-1136.

W. PRAGER et P. G. HODGE

[1] *Theory of perfectly plastic solids.* Wiley (1961).

W. PRAGER

[1] *Introduction to mechanics of continua.* Ginn and Company (1961).

[2] *Problèmes de plasticité théorique.* Dunod (1958).

[3] On ideal locking materials. *Transaction of the Society of rheology*, Vol. 1, 169-175 (1957).

PRODI : Cf. Foias et Prodi, Lions et Prodi.

E. REISSNER

[1] On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Physics*, Vol. 23 (1944).

[2] The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* June (1945).

A. REUSS

[1] *Zeitschrift für angewande Mathematik und Physik, 10*, 266 (1930).

RIVLIN : Cf. Green et Rivlin.

Y. ROCARD

[1] *Thermodynamique.* Masson et Cie, 2e édit. (1967).

T. ROCKAFELLAR

[1] Duality and stability in extremum problems involving convex functions. *Pacific J. of Math.*, 21 (1967), pp. 167-187.

[2] Integrals which are convex functionals. *Pacific J. of Math.* Vol. 24, nº 3 (1968).

M. de SAINT-VENANT

[1] Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps ductiles au-delà des limites d'élasticité. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 70* (1870), 473-480.

[2] Sur les équations du mouvement intérieur des solides ductiles. *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 16* (1871), 373-382.

E. SANCHEZ-PALENCIA

[1] Sur l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites posés par la magnétohydrodynamique. Thèse Faculté des Sciences de Paris, Département de Mécanique (1969).

G. SANDER

[1] Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques. *Publication de l'Université de Liège*, nº 15 (1969).

SCARPINI : Cf. Fusciardi.

M. SCHATZMAN

[1] Thèse 3e cycle, Paris (1971).

SCHIAFFINO : Cf. Fusciardi.

G. SCHMIDT

[1] Spectral and Scattering theory for Maxwell's equations in an exterior domain. *Archive Rat. Mech. Analy.*, 28 (1968), 284-322.

J. SCHWARTZ : Cf. Dunford et Schwartz.

L. SCHWARTZ
[1] *Théorie des distributions*, I; II, Hermann, Paris (1950-1951) (2e édition 1957).
[2] Distributions à valeurs vectorielles, I, II. *Annales Institut Fourier*, 7 (1957), 1-141 ; 8 (1958), 1-209.

L. I. SEDOV
[1] *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Addison-Wesley (1965).

J. SERRIN
[1] The initial value problem for the Navier Stokes equations, dans *Non Linear problems*, éd. par R. E. Langer (1963), 69-98.

M. J. SEWELL
[1] On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A265 (1969-1970), 319-351.

M. SIBONY
[1] Une méthode itérative pour les inéquations variationnelles non linéaires. *Pub. IRIA* (1968). Cf. Brézis et Sibony.

A. SIGNORINI
[1] Sopra alcune questioni di Elastostatica. *Atti della Soc. Ital. per il Progresso della Scineze* (1933).
[2] Questioni di Elastostatica linearizzata e semilinearizzata. *Rend. di Matem. e delle sur appl.*, Vol. XVIII (1959).

SMIRNOV : Cf. Bihovski et Smirnov.

S. L. SOBOLEV
[1] *Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la physique mathématique*. Leningrad (1950).

L. SOLOMON
[1] *Elasticitate Liniara*. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania.

V. A. SOLONNIKOV
[1] Sur certains problèmes aux limites stationnaires de la magnéto-hydrodynamique (en russe). *Troudi Mat. Dwest. Steklov*, LIX (1960), 174-187.

V. A. SOLONNIKOV : Cf. Ladyzenskaya et Solonnikov.

STAMPACCHIA : Cf. Brézis et Stampacchia, Lions et Stampacchia.

M. J. STRAUSS
[1] Variations of Korn's and Sobolev's inequalities. Berkeley Symposium, été 1971.

W. STRAUSS : Cf. Lions et Strauss.

R. TEMAN
[1] Solutions généralisées d'équations non linéaires non uniformément elliptiques. *Archive for Rat. Mech. Analysis* (1971).
[2] Cours Fac. Sci., Orsay (1971).

TIERSTEN : Cf. Mindlin et Tiersten.

S. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKI-KRIEGER
[1] *Theory of plates and shells*, 2e édition. McGraw-Hill (1959).

T. W. TING
[1] Elastic plastic torsion problem III. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 34 (1969), pp. 228-243.
[2] Elastic plastic torsion of convex cylindrical bars. *J. Math. Mec.*, n° 19 (1969), pp. 531-551.
[3] Elastic plastic torsion of simply connected cylindrical bars. *Indiana University Math. J.*, Vol. 20, n° 11 (1971), 1047-1076.

E. TONTI
[1] On the formal structure of continuum mechanics, part I : deformation theory. *Meccanica*. Vol. V, nº 1 (1970).

TRÉMOLIÈRES : Cf. Glowinski-Lions.

H. TRESCA
[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, *59*, 754 (1864) ; *70*, 27 (1870) ; *18*, 733 (1868) ; 20 (1872).

C. TRUESDELL et R. TOUPIN
[1] *The classical field theory*. Handbuck der Physik, Bank III, 1 (Springer) (1960). Cf. Noll et Truesdell.

R. A. TOUPIN
[1] Theories of elasticity with couple stress. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, Vol. 17, nº 2, pp. 85-112.

D. VIAUD
[1] *Publication IRIA* (1971).

K. WASHIZU
[1] *Variational methods in elasticity and Plasticity*. Pergamon Press (1968).

WOINOWSKI-KRIEGER : Cf. Timoshenko et Woinowski-Krieger.

K. YOSIDA
[1] *Functional Analysis*. Grundlehren B123, Springer (1965).

ZERNA : Cf. Green et Zerna.